

# POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR LES HYPERSURFACES LISSES DE $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$

28 mars 2014

## Résumé

Nous démontrons ici la conjecture de Batyrev et Manin pour le nombre de points de hauteur bornée de certaines hypersurfaces de l'espace triprojectif de tridegré  $(1, 1, 1)$ . La constante intervenant dans le résultat final est bien celle conjecturée par Peyre. La méthode utilisée est fortement inspirée de celle développée par D. Schindler pour traiter le cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs, qui elle-même s'inspire de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Première étape</b>	<b>5</b>
2.1	Sommes d'exponentielles . . . . .	6
2.2	Une inégalité de type Weyl . . . . .	7
2.3	La méthode du cercle . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Deuxième étape</b>	<b>18</b>
3.1	Sommes d'exponentielles . . . . .	20
3.2	La méthode du cercle . . . . .	22
3.3	Les arcs majeurs . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Troisième étape</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Quatrième étape</b>	<b>34</b>
<b>6</b>	<b>Cinquième étape</b>	<b>38</b>

<b>7</b>	<b>Conclusion et interprétation des constantes</b>	<b>42</b>
7.1	Étude de l'intégrale $J$	44
7.2	Étude de la série $\mathfrak{S}$	46
7.3	Conclusion	54

## 1 Introduction

On considère une hypersurface  $V$  de l'espace  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$  définie par une équation  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$  où

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq n} \alpha_{i, j, k} x_i y_j z_k,$$

avec  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = ((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n), (z_0 : \dots : z_n)) \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$  et  $\alpha_{i, j, k} \in \mathbf{Q}$ . On dira que  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$  est *primitif* si  $\text{pgcd}(x_0, \dots, x_n) = 1$ . Dans tout ce qui va suivre, on note pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$  :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|^n \max_{0 \leq j \leq n} |y_j|^n \max_{0 \leq k \leq n} |z_k|^n,$$

la hauteur associée au fibré anticanonique, et

$$H'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i| \max_{0 \leq j \leq n} |y_j| \max_{0 \leq k \leq n} |z_k|,$$

où  $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n), (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$  sont primitifs et tels que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = ((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n), (z_0 : \dots : z_n))$ . On souhaite déterminer une formule asymptotique pour le nombre de points  $([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}])$  d'un ouvert de Zariski de l'hypersurface  $V$  de hauteur  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  bornée par  $B$  (on notera  $\mathcal{N}_U(B)$  ce nombre de points), ce qui revient à évaluer, quitte à remplacer  $B$  par  $B^n$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_U(B) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \cap U \mid \\ (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n), (z_0, \dots, z_n) \text{ primitifs, } H'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\}, \end{aligned}$$

où  $U$  désigne un ouvert de Zariski de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ . On a en effet

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{8} \tilde{N}_U(B^{\frac{1}{n}})$$

(le coefficient  $\frac{1}{8}$  est dû au fait que deux vecteurs primitifs  $\mathbf{x}$  et  $-\mathbf{x}$  représentent le même élément de  $\mathbf{P}^n$ ). Par une inversion de Möbius, on se ramène au calcul de

$$(1) \quad N_U(B) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \cap U \mid H'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\}.$$

Nous allons évaluer ce nombre  $N_U(B)$  en suivant la méthode décrite par Schindler (cf. [Sch1], [Sch2]). Nous établirons en fait (voir proposition 6.2) que, pour un ouvert  $U$  bien choisi, ce nombre est

$$N_U(B) = \frac{1}{2}\sigma B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)),$$

(où  $\sigma$  est une constante que nous préciserons), ce qui nous permettra d'en déduire que :

$$\mathcal{N}_U(B) = C(V)B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)),$$

où  $C(V)$  est la constante conjecturée par Peyre (cf.[Pe]). Remarquons qu'il est ici indispensable de se restreindre à un ouvert de Zariski  $U$ . La variété  $V$  présente en effet des sous-variétés accumulatrices. Considérons par exemple un point  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}$  tel que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \sum_{i,j=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i y_j = 0.$$

Alors, pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1}$  tel que  $|\mathbf{z}| \leq B/(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|)$  on aurait  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ , ce qui implique donc que

$$\text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V \cap (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \mid H'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\} \gg B^{n+1}.$$

On notera, pour  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^{n+1}$  :

$$(2) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i y_j,$$

$$(3) \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i z_k,$$

$$(4) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{i,j,k} y_j z_k.$$

Par ailleurs, on définit

$$(5) \quad V_3^* = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$(6) \quad V_2^* = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, \dots, n\}, B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(7) \quad V_1^* = \{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, \dots, n\}, B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}.$$

On veut supposer que l'hypersurface  $V$  est lisse. Il nous sera également utile de supposer qu'elle vérifie par ailleurs la propriété suivante :

$$\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n + 1.$$

Il convient donc de démontrer qu'il existe des rationnels  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k}$  tels que ces propriétés soient vraies. En fait, nous allons montrer que chacune de ces propriétés est vraie pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ .

Montrons que  $V$  est lisse pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ . Remarquons que  $X = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$  peut être vue comme une sous-variété lisse de  $\mathbf{P}^N$  (où  $N = (n+1)^3 - 1$ ) via le plongement de Segre :

$$\begin{aligned} s : \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n &\rightarrow \mathbf{P}^N \\ ([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]) &\mapsto [(x_i y_j z_k)_{i,j,k}]. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème de Bertini (cf. [Ha]), pour une famille ouverte dense d'hyperplans projectifs  $H_{\alpha} = \{(X_{i,j,k}) \mid \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} X_{i,j,k} = 0\} \subset \mathbf{P}^N$ , on a que  $X \cap H_{\alpha}$  est lisse, or on remarque que :

$$X \cap H_{\alpha} = \{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]) \in X \mid \sum_{i,j,k=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i y_j z_k = 0\}.$$

Par conséquent,  $V$  est lisse pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ .

Nous allons à présent montrer que pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ , on a  $\dim V_3^* = n + 1$ . On plonge  $Y = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$  dans  $\mathbf{P}^{N'}$  (où  $N' = (n+1)^2 - 1$ ) via le plongement de Segre. Toujours par application du théorème de Bertini, on a qu'il existe un ouvert dense d'hyperplans  $H_{\alpha_0} = \{[X_{i,j}] \mid \sum_{i,j=0}^n \alpha_{i,j,0} X_{i,j} = 0\}$  ne contenant pas  $Y$  tels que  $H_{\alpha_0} \cap Y$  soit lisse. On a alors  $\dim(Y \cap H_{\alpha_0}) = 2n - 1$  pour chacun de ces hyperplans. On procède de même par la suite avec des hyperplans  $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}$  (avec  $H_{\alpha_k} = \{[X_{i,j}] \mid \sum_{i,j=0}^n \alpha_{i,j,k} X_{i,j} = 0\}$ ). On trouve alors que, pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k}) = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ , on a que

$$Y \cap H_{\alpha_0} \cap \dots \cap H_{\alpha_n} = \{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \mid B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall k\}$$

est lisse et de dimension  $2n - (n+1) = n - 1$ . Par conséquent,  $\dim V_3^* = n + 1$  pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ . On montre de façon analogue que  $\dim V_2^* = n + 1$  et  $\dim V_1^* = n + 1$  pour un ouvert dense de  $(\alpha_{i,j,k})$ .

On conclut qu'il existe un ouvert dense de rationnels  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$  tels que l'hypersurface  $V$  qu'ils définissent soit lisse et telle que  $\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n + 1$ . Nous supposons donc dorénavant que  $V$  est une

telle hypersurface.

La méthode employée ici pour évaluer  $N_U(B)$  consiste dans un premier temps à donner une formule asymptotique pour le nombre  $N_U(P_1, P_2, P_3)$  de points  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  de  $U \cap (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1})$  tels que  $|\mathbf{x}| \leq P_1$ ,  $|\mathbf{y}| \leq P_2$ ,  $|\mathbf{z}| \leq P_3$  (ici  $|\mathbf{x}|$  désignera  $\max_i |x_i|$ ). On démontre en fait que l'on a une formule du type

$$(8) \quad N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O\left(P_1^n P_2^n P_3^n \min\{P_1, P_2, P_3\}^{-\delta}\right)$$

pour des constantes  $\sigma$  et  $\delta > 0$  que nous préciserons. Par la suite, on utilise des résultats semblables à ceux de la section 9 de [Sch2] pour en déduire  $N_U(B)$ .

Dans la section 2, en utilisant des arguments issus de la méthode du cercle, on établit la formule (8) pour  $P_1, P_2, P_3 \ll$  relativement proches ». Plus précisément on montre (cf. proposition 2.12) que si  $P_2 = P_1^b$  et  $P_3 = P_1^{b'}$  avec  $b, b' \geq 1$  et si  $1 + b + b' < n + 1$ , alors la formule (8) est vérifiée. Par la suite dans la section 3, pour un  $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ , on donne une formule asymptotique pour le nombre de points  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  de la fibre  $V_{\mathbf{x}}$  de  $V$  tels que  $|\mathbf{y}| \leq P_2$  et  $|\mathbf{z}| \leq P_3$  en utilisant à nouveau la méthode du cercle. Les résultats obtenus combinés avec ceux de la section 2 nous permettrons dans la section 4 d'établir la formule (8) pour  $b, b'$  arbitrairement grands mais vérifiant  $b' \leq b + 1 + \nu$  (avec  $\nu > 0$  arbitrairement petit) (voir proposition 4.4). La section 5 est consacrée au cas où  $b' > b + 1 + \nu$ . On résout ce problème en invoquant des résultats de géométrie des nombres, et plus précisément de comptage de points d'un réseau hyperplan dans un domaine borné. Tout ceci permet finalement de démontrer la formule (8) pour tous  $P_1, P_2, P_3$  (cf. proposition 5.3). Dans la section 6, on utilise les résultats établis par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour conclure quant à la valeur de  $N_U(B)$  à partir des résultats obtenus pour  $N_U(P_1, P_2, P_3)$ . Enfin, la section 7 est consacrée à l'étude des constantes intervenant dans la formule asymptotique obtenue pour  $N_U(B)$ . On vérifie en particulier que le résultat est bien en accord avec les conjectures avancées par Peyre dans [Pe].

## 2 Première étape

Dans cette première partie, nous allons démontrer, pour  $1 \leq P_1 \leq P_2 \leq P_3$ , que le nombre

$$\begin{aligned} N(P_1, P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2) \\ \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\} \end{aligned}$$

(où  $P_i \mathcal{B}_i = P_i[-1, 1]^{n+1} = [-P_i, P_i]^{n+1}$ ) est du type

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

pour  $n$  assez grand. La méthode utilisée est inspirée de l'article [Sch1].

## 2.1 Sommes d'exponentielles

Soit  $\alpha \in [0, 1]$ , on pose

$$(9) \quad S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\substack{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \sum_{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))$$

où  $e$  désigne l'application  $x \mapsto \exp(2i\pi x)$ . On commence par remarquer que, pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  fixés :

$$(10) \quad \left| \sum_{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \right| \ll \prod_{k=0}^n \min(P_3, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|^{-1})$$

où, pour  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\|a\|$  désigne la distance de  $a$  à  $\mathbf{Z}$ , autrement dit  $\|a\| = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |a - m|$ . Considérons  $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$ . On note, pour  $\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1$  fixé :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \mid r_k P_3^{-1} \leq \{\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \leq (r_k + 1) P_3^{-1}\},$$

où, pour  $m \in \mathbf{R}$ ,  $\{m\}$  désigne la partie fractionnaire de  $m$ . On a alors que, pour  $\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1$  fixé, d'après (10) :

$$(11) \quad \sum_{\substack{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \sum_{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \\ \ll \sum_{|\mathbf{r}| \leq P_3} A(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \prod_{k=0}^n \min\left(P_3, \max\left(\frac{P_3}{r_k}, \frac{P_3}{P_3 - r_k - 1}\right)\right).$$

D'autre part, si  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{r})^2$ , on a alors :

$$\|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})\| < P_3^{-1}.$$

Par conséquent, si l'on note

$$N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < P_3^{-1}\},$$

on a alors  $A(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq N(\mathbf{x}) + 1$  pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{r}$ , et la formule (11) donne alors :

$$\begin{aligned}
|S(\alpha)| &\ll \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1} N(\mathbf{x}) \sum_{|\mathbf{r}| \leq P_3} \prod_{k=0}^n \min \left( P_3, \max \left( \frac{P_3}{r_k}, \frac{P_3}{P_3 - r_k - 1} \right) \right) \\
&\ll \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1} N(\mathbf{x}) \prod_{k=0}^n \left( \sum_{r=0}^{\lfloor P_3 \rfloor} \min \left( P_3, \max \left( \frac{P_3}{r}, \frac{P_3}{P_3 - r - 1} \right) \right) \right) \\
&\ll \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1} N(\mathbf{x}) (P_3 \log(P_3))^{n+1} \\
&\ll P_3^{n+1+\varepsilon} M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}),
\end{aligned}$$

avec  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, et

$$\begin{aligned}
(12) \quad M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) &= \text{card} \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| \leq P_1, \\
&\quad |\mathbf{y}| \leq P_2, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq P_3^{-1} \}.
\end{aligned}$$

On a donc établi le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Soit  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $P > 0$  et  $\varepsilon > 0$  quelconque. Pour un réel  $\kappa > 0$  fixé, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1.  $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$ .
2.  $M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) \gg P_1^{n+1} P_2^{n+1} P^{-\kappa}$ .

Nous allons à présent réexprimer la deuxième assertion de ce lemme, en utilisant [Sch1, lemme 3.1] pour évaluer  $M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1})$ .

## 2.2 Une inégalité de type Weyl

Rappelons le résultat suivant (cf. [Sch1, lemme 3.1]) :

**Lemme 2.2.** *Soient  $n_1, n_2$  des entiers et  $\lambda_{i,j}$  des réels pour  $1 \leq i \leq n_1$  et  $1 \leq j \leq n_2$ . On considère les formes linéaires*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n_2} \quad L_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{i,j} u_j \quad i \in \{1, \dots, n_1\}$$

ainsi que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n_1} \quad L_j^t(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{i,j} u_i \quad j \in \{1, \dots, n_2\}.$$

D'autre part, étant donné un réel  $a > 1$ , on note

$$\begin{aligned}
U(Z) &= \text{card} \{ (u_1, \dots, u_{n_2}, \dots, u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall j \in \{1, \dots, n_2\}, |u_j| < aZ, \\
&\quad \forall i \in \{1, \dots, n_1\}, |L_i(u_1, \dots, u_{n_2}) - u_{n_2+i}| < a^{-1}Z \},
\end{aligned}$$

et de même

$$U^t(Z) = \text{card}\{(u_1, \dots, u_{n_1}, \dots, u_{n_1+n_2}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall i \in \{1, \dots, n_1\}, |u_i| < aZ, \\ \forall j \in \{1, \dots, n_2\}, |L_j^t(u_1, \dots, u_{n_1}) - u_{n_1+j}| < a^{-1}Z\}.$$

On a alors, si  $0 < Z_1 \leq Z_2 \leq 1$  :

$$U(Z_2) \ll \max \left( \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} a^{n_2-n_1} U^t(Z_1) \right).$$

**Remarque 2.3.** Par la démonstration de [Sch1, lemme 3.1], on a que cette majoration de  $U(Z_2)$  est indépendante des  $\lambda_{i,j}$  choisis.

Nous allons appliquer ce lemme, pour un  $\mathbf{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1}$  fixé, aux réels  $(\lambda_{k,j})_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = (\alpha \sum_{i=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i)_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ , de sorte que

$$L_k(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^n \lambda_{k,j} y_j = \alpha \sum_{0 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j,k} x_i y_j = \alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

et

$$L_j^t(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,j} z_k = \alpha \sum_{0 \leq i,k \leq n} \alpha_{i,j,k} x_i z_k = \alpha B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Dans ce qui va suivre, pour tous réels strictement positifs  $H_1, H_2, H_3$ , on note :

$$(13) \quad M_1(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{z}| \leq H_1, \\ |\mathbf{y}| \leq H_2, \|\alpha B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})\| < H_3\},$$

$$(14) \quad M_2(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| \leq H_1, \\ |\mathbf{z}| \leq H_2, \|\alpha B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})\| < H_3\},$$

$$(15) \quad M_3(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| \leq H_1, \\ |\mathbf{y}| \leq H_2, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < H_3\}.$$

On fixe un réel  $\theta_2 \in [0, 1]$ . On choisit alors des paramètres  $Z_1, Z_2$  et  $a$  tels que :

$$P_2 = aZ_2, \quad P_3^{-1} = a^{-1}Z_2, \quad P_2^{\theta_2} = aZ_1,$$

ce qui implique :

$$a^{-1}Z_1 = P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}.$$



On a alors, d'après le lemme 2.2 :

$$\begin{aligned} U(Z_2) &= \text{card}\{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y}| \leq P_2, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < P_3^{-1}, \forall k \in \{0, \dots, n\}\} \\ &\ll \max \left( \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n+1} U(Z_1), \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n+1} U^t(Z_1) \right) \\ &= P_2^{(n+1)(1-\theta_2)} \max(U(Z_1), U^t(Z_1)) \end{aligned}$$

(cette majoration étant indépendante de  $\mathbf{x}$ ) avec

$$U(Z_1) = \text{card}\{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y}| \leq P_2^{\theta_2}, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \forall k \in \{0, \dots, n\}\},$$

$$U^t(Z_1) = \text{card}\{\mathbf{z} \mid |\mathbf{z}| \leq P_2^{\theta_2}, \|\alpha B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})\| < P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \forall j \in \{0, \dots, n\}\}.$$

En sommant ces majoration sur tous les  $\mathbf{x} \in [-P_1, P_1] \cap \mathbf{Z}^{n+1}$ , on trouve alors :

$$\begin{aligned} (16) \quad & M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) \\ & \ll P_2^{(n+1)(1-\theta_2)} \left( M_3(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) + M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Par la suite, on applique à nouveau le lemme 2.2 en prenant cette fois-ci un  $\mathbf{y} \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1}$ , et en choisissant  $(\lambda_{i,k})_{i,k} = \left( \alpha \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j,k} y_j \right)_{i,k}$ , ainsi que :

$$aZ_2 = P_1, \quad a^{-1}Z_2 = P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \quad aZ_1 = P_1^{\theta_1}, \quad a^{-1}Z_1 = P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1},$$

où  $\theta_1$  est un réel tel que  $P_1^{\theta_1} = P_2^{\theta_2}$ . On a alors que :

$$\begin{aligned} U(Z_2) &= \text{card}\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq P_1, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \forall k \in \{0, \dots, n\}\} \\ &\ll \max \left( \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n+1} U(Z_1), \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^{n+1} U^t(Z_1) \right) \\ &= P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} \max(U(Z_1), U^t(Z_1)), \end{aligned}$$

avec

$$U(Z_1) = \text{card}\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq P_1^{\theta_1}, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \forall k \in \{0, \dots, n\}\},$$

$$U^t(Z_1) = \text{card}\{\mathbf{z} \mid |\mathbf{z}| \leq P_1^{\theta_1}, \|\alpha B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})\| < P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \forall i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Puis, en sommant sur les  $\mathbf{y} \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1} \cap \mathbf{Z}^{n+1}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} (17) \quad & M_3(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) \ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} (M_3(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) \\ & \quad + M_1(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1})). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour  $M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1})$  (en appliquant cette fois-ci le lemme 2.2 à  $(\lambda_{i,j}) = (\alpha \sum_{k=0}^n \alpha_{i,j,k} z_k)$  pour un  $z \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1}$  fixé, et en prenant à nouveau  $aZ_2 = P_1$ ,  $a^{-1}Z_2 = P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}$ ,  $aZ_1 = P_1^{\theta_1}$ ,  $a^{-1}Z_1 = P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}$ ) on trouve :

$$(18) \quad M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) \ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} (M_2(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) + M_1(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1})).$$

En regroupant les résultats obtenus en (16), (17), (18), on trouve :

$$(19) \quad M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) \ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} P_2^{(n+1)(1-\theta_2)} \max_{i \in \{1,2,3\}} M_i(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}).$$

On déduit de ceci et du lemme 2.1 le résultat suivant :

**Lemme 2.4.** *Soit  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $P > 0$  et  $\varepsilon > 0$  quelconque. On note  $\theta$  le réel tel que  $P_1^{\theta_1} = P_2^{\theta_2} = P^\theta$ . Pour un réel  $\kappa > 0$  fixé, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.  $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$ .
2. Il existe un entier  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que

$$M_i(\alpha, P^\theta, P^\theta, P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta}) \gg P^{2(n+1)\theta-\kappa}.$$

Considérons à présent un couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_3(\alpha, P^\theta, P^\theta, P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta})$  tel qu'il existe un entier  $k_0 \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ . On note alors  $q = |B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ . Par définition de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , on a que  $q \ll P^{2\theta}$ . On note alors  $a$  l'entier le plus proche de  $\alpha B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et  $\delta = \alpha B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - a$ . On a alors  $\alpha q = a + \delta$ , et donc :

$$|q\alpha - a| = |\delta| = |\alpha B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta}.$$

En procédant de même avec des couples  $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in M_2(\alpha, P^\theta, P^\theta, P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta})$  ou  $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in M_1(\alpha, P^\theta, P^\theta, P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta})$ , et en utilisant le lemme précédent, on obtient le résultat ci-dessous :

**Lemme 2.5.** *Pour un réel  $\kappa > 0$  fixé, il existe une constante  $C > 0$  telle que l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1.  $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$ .
2. Il existe des entiers  $a, q$  tels que  $1 \leq q \ll P^{2\theta}$ ,  $\text{pgcd}(a, q) = 1$  et

$$2|q\alpha - a| \leq P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| \leq P^\theta, |\mathbf{y}| \leq P^\theta, \\ B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall k \in \{0, \dots, n\}\} \geq CP^{2(n+1)\theta-\kappa}. \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| \leq P^\theta, |\mathbf{z}| \leq P^\theta, \\ B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \ \forall j \in \{0, \dots, n\}\} \geq CP^{2(n+1)\theta-\kappa}. \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned} \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{y}| \leq P^\theta, |\mathbf{z}| \leq P^\theta, \\ B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \ \forall i \in \{0, \dots, n\}\} \geq CP^{2(n+1)\theta-\kappa}. \end{aligned}$$

Remarquons que les conditions 3, 4, 5 impliquent respectivement :

$$\dim V_3^* \geq 2(n+1) - \kappa/\theta, \dim V_2^* \geq 2(n+1) - \kappa/\theta, \dim V_1^* \geq 2(n+1) - \kappa/\theta,$$

(voir par exemple la démonstration du théorème 3.1 de [Br]).

A partir d'ici, nous allons poser  $\kappa = K\theta$ , et nous supposons

$$K = 2(n+1) - \max_{i \in \{1,2,3\}} \dim V_i^* = n+1,$$

(rappelons que nous avons supposé que les  $\alpha_{i,j,k}$  sont tels que  $\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n+1$ ). D'autre part, nous fixerons dorénavant  $P = P_1 P_2 P_3$ , que l'on peut aussi écrire  $P = P_1^{1+b+b'}$ , en notant  $P_2 = P_1^b$  et  $P_3 = P_1^{b'}$ , avec  $1 \leq b \leq b'$ , puisque  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ . Etant donné que l'on a  $P^\theta = P_2^{\theta_2} = P_1^{\theta_1}$ , on peut remarquer que l'on a alors :

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{b}, \quad \theta = \frac{\theta_1}{1+b+b'}.$$

Par ailleurs nous noterons, à partir d'ici, (pour un  $\theta$  fixé)  $\mathfrak{M}(\theta)$  l'ensemble des  $\alpha \in [0, 1]$  satisfaisant la condition (2) du lemme précédent, c'est-à-dire :

$$(20) \quad \mathfrak{M}(\theta) = \{\alpha \in [0, 1] \mid \exists q, a \in \mathbf{Z} \mid \text{pgcd}(a, q) = 1, \\ 1 \leq q \ll P^{2\theta}, 2|q\alpha - a| \ll P^{-1+2\theta}\}.$$

Pour le choix de  $K$  effectué ci-dessus, on voit que le lemme 2.5 implique :

**Lemme 2.6.** *Soit  $0 < \theta < (1+b+b')^{-1}$ , et  $\varepsilon > 0$ . L'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.  $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta+\varepsilon}$ .
2. Le réel  $\alpha$  appartient à l'ensemble  $\mathfrak{M}(\theta)$ .

### 2.3 La méthode du cercle

On suppose à présent que l'on a  $K = n + 1 > \max(4, b + b' + 1)$ . On choisit par ailleurs des réels  $\delta > 0$  et  $\theta_0 \in [0, 1]$  (avec  $\delta$  arbitrairement petit) tels que :

$$(21) \quad K - 4 = n - 3 > 2\delta\theta_0^{-1},$$

$$(22) \quad K = n + 1 > (2\delta + 1)(1 + b + b'),$$

$$(23) \quad 1 > 10(1 + b + b')\theta_0 + (1 + b + b')\delta = (1 + b + b')(10\theta_0 + \delta).$$

On établit alors le lemme suivant :

**Lemme 2.7.** *On a une majoration*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_0)} |S(\alpha)| d\alpha \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta}.$$

*Démonstration.* On considère une suite d'éléments  $\theta_i$  tels que  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{T-1} < \theta_T$ ,  $\theta_T \leq (1 + b + b')^{-1}$  et  $\theta_T K = \theta_T(n + 1) > 2\delta + 1$  (un tel choix de  $\theta_T$  est possible d'après (22)). On choisit de plus les  $\theta_i$  tels que  $(\theta_{t+1} - \theta_t) \leq \frac{1}{8}\delta$ . Pour un  $\delta > 0$  fixé, on peut choisir une telle suite avec  $T \ll P^{\frac{\delta}{4}}$ , ce que nous supposons. On a alors, d'après le lemme 2.6 :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S(\alpha)| d\alpha &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_T+\varepsilon} \\ &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta} \end{aligned}$$

(puisque  $\theta_T K > 2\delta + 1$ ). On a par ailleurs, par définition de  $\mathfrak{M}(\theta)$  :

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}(\theta)) \ll \sum_{q \ll P^{2\theta}} \sum_{\substack{|a| < q \\ \text{pgcd}(a, q) = 1}} q^{-1} P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta} \ll P^{-1+4\theta}.$$

On a alors, toujours par le lemme 2.6, pour tout  $t \in \{0, \dots, T-1\}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)} S(\alpha) d\alpha &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_t+\varepsilon} \text{Vol}(\mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)) \\ &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_t+\varepsilon-1+4\theta_{t+1}}. \end{aligned}$$

Or, puisque  $2\delta\theta_0^{-1} < K - 4$  (cf. 21), en rappelant que  $(\theta_{t+1} - \theta_t) \leq \frac{1}{8}\delta$ , on a

$$\begin{aligned} -K\theta_t + 4\theta_{t+1} &< -2\delta\theta_0^{-1} + 4(\theta_{t+1} - \theta_t) \\ &\leq -2\delta\theta_0^{-1} + \frac{\delta}{2} < -\frac{3}{2}\delta. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_0)} |S(\alpha)| d\alpha &= \sum_{t=0}^{T-1} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)} S(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S(\alpha)| d\alpha \\
&\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} \left( \sum_{t=0}^{T-1} P^{-K\theta_t + \varepsilon - 1 + 4\theta_{t+1}} + P^{-1-\delta} \right) \\
&\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} (TP^{\varepsilon-1-\frac{3}{2}\delta} + P^{-1-\delta}) \\
&\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta}.
\end{aligned}$$

□

On définit à présent une nouvelle famille d'arc majeurs, pour  $q \geq 1$ , et  $a \in \mathbf{Z}$  :

$$\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \{\alpha \in [0, 1] \mid |q\alpha - a| \leq qP^{-1+2\theta}\}$$

et

$$\mathfrak{M}'(\theta) = \bigcup_{1 \leq q \ll P^{2\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$$

(remarquons que ce nouvel ensemble  $\mathfrak{M}'(\theta)$  contient  $\mathfrak{M}(\theta)$ ). On peut voir facilement que les ensembles  $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$ , (pour  $1 \leq q \ll P^{2\theta}$ , et  $0 \leq a < q$ ,  $\text{pgcd}(a,q) = 1$ ) sont disjoints lorsque  $\theta < \frac{1}{8}$ . En effet si l'on suppose, par l'absurde qu'il existe  $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$ , avec  $(a,q) \neq (a',q')$ . On a alors, puisque  $\text{pgcd}(a,q) = \text{pgcd}(a',q') = 1$  :

$$\frac{1}{qq'} \leq \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| + \left| \alpha - \frac{a'}{q'} \right| \ll P^{-1+2\theta}.$$

On aurait alors :

$$1 \leq qq' P^{-1+2\theta} \ll P^{-1+6\theta},$$

ce qui est absurde pour  $\theta < \frac{1}{6}$ . En particulier, puisque  $\theta_0 < \frac{1}{10}$  (d'après (23)), les ensembles  $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$  sont disjoints. On a alors immédiatement, par le lemme 2.7 (puisque  $\mathfrak{M}(\theta_0) \subset \mathfrak{M}'(\theta_0)$ ) :

**Lemme 2.8.** *On a l'estimation :*

$$\begin{aligned}
N(P_1, P_2, P_3) &= \sum_{1 \leq q \ll P^{2\theta_0}} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)} S(\alpha) d\alpha \\
&\quad + O(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta}).
\end{aligned}$$

Etant donné  $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$ , on pose  $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ , avec  $|\beta| \leq P^{-1+2\theta_0}$ . On introduit à présent les notations :

$$(24) \quad S_{a,q} = \sum_{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)})\right)$$

et

$$(25) \quad I(\beta) = \int_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e(\beta F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})) d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\mathbf{w}.$$

On établit le résultat suivant :

**Lemme 2.9.** *Soit  $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$ , avec  $q \ll P^{2\theta_0}$ , et  $0 \leq a < q$ ,  $\text{pgcd}(a, q) = 1$  et  $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ . On a alors :*

$$S(\alpha) = P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} q^{-3n-3} S_{a,q} I(P\beta) + O(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{4\theta_0} P_1^{-1}).$$

*Démonstration.* Remarquons dans un premier temps que :

$$S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \\ + \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2) \cap \mathbf{Z}^{2n+2} \cap V_3^*\} P_3^{n+1}.$$

Or, puisque  $\dim(V_3^*) = n+1$  et que  $P_1 \leq P_2$ , on a

$$S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\mathbf{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \\ + O(P_2^{n+1} P_3^{n+1}).$$

On peut alors écrire

$$(26) \quad S(\alpha) = \sum_{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)})\right) S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}) \\ + O(P_2^{n+1} P_3^{n+1}),$$

avec

$$S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}) = \sum_{\substack{\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}' \\ (q\mathbf{x}' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(2)}, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(3)}) \\ \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \times P_3 \mathcal{B}_3}} e(\beta F(q\mathbf{x}' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(2)}, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(3)})).$$

On considère à présent deux triplets  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'), (\mathbf{x}'', \mathbf{y}'', \mathbf{z}'') \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \times P_3 \mathcal{B}_3$  tels que :

$$\max_{0 \leq i \leq n} |x'_i - x''_i| \leq 2, \quad \max_{0 \leq j \leq n} |y'_j - y''_j| \leq 2, \quad \max_{0 \leq k \leq n} |z'_k - z''_k| \leq 2.$$

Dans ce cas, on a

$$\left| F(q\mathbf{x}' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(2)}, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(3)}) - F(q\mathbf{x}'' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}^{(2)}, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}^{(3)}) \right| \\ \ll q(P_1 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3) \ll q P_2 P_3.$$

Remarquons que  $q < \min\{P_1, P_2, P_3\} = P_1$ , étant donné que  $q \ll P^{2\theta_0}$  et  $\theta_0 < \frac{1}{8(b+b'+1)}$  d'après (23). On peut alors remplacer la somme  $S_3$  par une intégrale, et on obtient :

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}) &= \int_{q\tilde{\mathbf{u}} \in P_1\mathcal{B}_1} \int_{q\tilde{\mathbf{v}} \in P_2\mathcal{B}_2} \int_{q\tilde{\mathbf{w}} \in P_3\mathcal{B}_3} e(\beta F(q\tilde{\mathbf{u}}, q\tilde{\mathbf{v}}, q\tilde{\mathbf{w}})) d\tilde{\mathbf{u}} d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{w}} \\ &+ O\left(\underbrace{|\beta|}_{\leq P^{-1+2\theta_0}} \underbrace{q}_{\leq P^{2\theta_0}} P_2 P_3 \left(\frac{P_1}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1}\right) \\ &+ O\left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^n \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

En effectuant un changement de variables

$$\mathbf{u} = qP_1^{-1}\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} = qP_2^{-1}\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{w} = qP_3^{-1}\tilde{\mathbf{w}},$$

dans l'intégrale, puis en remplaçant par l'expression de  $S_3$  obtenue dans (26), on trouve le résultat souhaité.  $\square$

En regroupant les lemmes 2.8 et 2.9, on obtient :

$$\begin{aligned} N(P_1, P_2, P_3) &= P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} \sum_{1 \leq q \ll P^{2\theta_0}} q^{-3n-3} \\ &\sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q)=1}} S_{a, q} \int_{|\beta| \leq P^{-1+2\theta_0}} I(P\beta) d\beta \\ &+ O\left(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{4\theta_0} P_1^{-1} \text{Vol}(\mathfrak{M}'_{a, q}(\theta_0))\right). \end{aligned}$$

Or, on a que

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}'_{a, q}(\theta_0)) \ll \sum_{q \ll P^{2\theta_0}} q P^{-1+2\theta_0} \ll P^{-1+6\theta_0}.$$

Par conséquent, si 'on pose :

$$(27) \quad \mathfrak{S}(P^{2\theta_0}) = \sum_{1 \leq q \ll P^{2\theta_0}} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q)=1}} S_{a, q},$$

et

$$(28) \quad J(P^{2\theta_0}) = \int_{|\beta| \leq P^{2\theta_0}} I(\beta) d\beta = P \int_{|\beta| \leq P^{-1+2\theta_0}} I(P\beta) d\beta$$

on a alors :

$$N(P_1, P_2, P_3) = P_1^n P_2^n P_3^n \mathfrak{S}(P^{2\theta_0}) J(P^{2\theta_0}) + O\left(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1+10\theta_0} P_1^{-1}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1+8\theta_0} P_1^{-1} &= P_1^n P_2^n P_3^n P^{10\theta_0 - \frac{1}{1+b+b'}} \\ &\leq P_1^n P_2^n P_3^n P^{-\delta} \end{aligned}$$

car on a supposé  $10\theta_0 + \delta < (1+b+b')^{-1}$  (cf 23). On définit par la suite

$$(29) \quad \mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q},$$

et

$$(30) \quad J = \int_{\mathbf{R}} I(\beta) d\beta$$

**Lemme 2.10.** *La série  $\mathfrak{S}$  est absolument convergente, et on a, pour  $Q$  assez grand :*

$$|\mathfrak{S} - \mathfrak{S}(Q)| \ll Q^{-\frac{n}{2}+2}.$$

*Démonstration.* Nous allons appliquer les lemmes précédents avec  $P_1 = P_2 = P_3 = q$ . On définit un élément  $\theta \in [0, 1]$  par  $6\theta = 1 - \varepsilon$  (pour un  $\varepsilon > 0$  fixé). On remarque que pour  $\alpha = \frac{a}{q}$ , alors  $\alpha$  n'appartient à aucun arc majeur  $\mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$ . En effet, si on avait  $\frac{a}{q} \in \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$ , alors on aurait

$$q' \ll P^{2\theta} = (P_1 P_2 P_3)^{2\theta} = q^{6\theta} = q^{1-\varepsilon} < q$$

et par ailleurs

$$1 \leq |q'a - a'q| < qq'P^{-1+2\theta} < q^{-1+6\theta} = q^{-\varepsilon},$$

ce qui est absurde. On a alors (d'après le lemme 2.6) :

$$\begin{aligned} |S(\alpha)| &= |S_{a,q}| \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta+\varepsilon} \\ &= q^{3n+3} q^{-3K\theta+\varepsilon} \\ &\ll q^{3n+3} q^{-K/2+\varepsilon'} = q^{3n+3} q^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon'} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S} - \mathfrak{S}(Q)| &= \left| \sum_{q>Q} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q} \right| \\ &\ll \sum_{q>Q} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q}| \\ &\ll \sum_{q>Q} q^{-\frac{n+1}{2}+1+\varepsilon'} \ll Q^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+\varepsilon'}. \end{aligned}$$

□



**Lemme 2.11.** *L'intégrale  $J$  est absolument convergente et on a de plus, pour  $\phi$  assez grand :*

$$|J - J(\phi)| \ll \phi^{-1}.$$

*Démonstration.* Nous allons appliquer les lemmes de la section 2.2 avec  $\theta = \theta_0$  et  $P$  tel que  $P^{2\theta_0} = \beta$ . On a alors pour tout  $\beta$  que  $P^{-1}\beta \in \mathfrak{M}'_{0,1}(\theta_0)$ . Le lemme 2.9 donne alors :

$$(31) \quad S(P^{-1}\beta) = P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}I(\beta) + O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{2\theta_0}P_1^{-1}).$$

De plus, étant donné que  $P^{-1}\beta$  appartient au bord de  $\mathfrak{M}'_{0,1}(\theta_0)$  (car  $P^{-1}\beta = P^{-1+2\theta_0}$ ), donc au bord de  $\mathfrak{M}'(\theta_0)$ , le lemme 2.6 donne :

$$|S(P^{-1}\beta)| \ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K\theta_0+\varepsilon}.$$

Par conséquent l'équation (31) donne :

$$\begin{aligned} P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}I(\beta) + O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{2\theta_0}P_1^{-1}) \\ = O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K\theta_0+\varepsilon}), \end{aligned}$$

donc

$$I(\beta) = O(P^{-K\theta_0+\varepsilon} + P^{2\theta_0}P_1^{-1}) = O(P^{-K\theta_0+\varepsilon} + P^{2\theta_0-\frac{1}{1+b+b'}}).$$

Or, on a par ailleurs :

$$P^{2\theta_0-\frac{1}{1+b+b'}} < P^{-8\theta_0-\delta} \ll \beta^{-4-\delta'} \ll \beta^{-4},$$

(voir (23)) ainsi que

$$P^{-K\theta_0+\varepsilon} \ll P^{-4\theta_0-2\delta} \ll \beta^{-2},$$

(cf. (21)). On a ainsi  $|I(\beta)| \ll \beta^{-2}$ , et donc finalement :

$$|J - J(\phi)| \ll \int_{|\beta|>\phi} |I(\beta)| d\beta \ll \phi^{-1}.$$

□

On a donc établi le résultat suivant :

**Proposition 2.12.** *On suppose  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ ,  $P_2 = P_1^b$ ,  $P_3 = P_1^{b'}$ . Pour  $(n+1) > b' + b + 1$ , si  $\sigma = \mathfrak{S}J$ , on a alors :*

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^n P_3^n P^{-\delta}),$$

(avec  $P = P_1 P_2 P_3$  et  $\delta > 0$  arbitrairement petit).

### 3 Deuxième étape

Pour cette partie, nous introduisons les notations suivantes. On fixe un élément  $\lambda \in \mathbf{N}^*$ . Pour cet entier, on note

$$(32) \quad \mathcal{A}_{1,\lambda} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{2,\mathbf{x}}^* < \lambda, \dim V_{3,\mathbf{x}}^* < \lambda\},$$

où l'on a noté :

$$(33) \quad V_{3,\mathbf{x}}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$(34) \quad V_{2,\mathbf{x}}^* = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, \dots, n\}, B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\},$$

et on pose, par abus de langage :

$$(35) \quad \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{1,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1}.$$

On définit de même

$$(36) \quad \mathcal{A}_{2,\lambda} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{1,\mathbf{y}}^* < \lambda, \dim V_{3,\mathbf{y}}^* < \lambda\},$$

avec :

$$(37) \quad V_{3,\mathbf{y}}^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$(38) \quad V_{1,\mathbf{y}}^* = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, \dots, n\}, B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(39) \quad \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{2,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1},$$

et

$$(40) \quad \mathcal{A}_{3,\lambda} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{1,\mathbf{z}}^* < \lambda, \dim V_{2,\mathbf{z}}^* < \lambda\},$$

avec :

$$(41) \quad V_{1,\mathbf{z}}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, \dots, n\}, B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(42) \quad V_{2,\mathbf{z}}^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, \dots, n\}, B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(43) \quad \mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{3,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1}.$$

Dans ce qui va suivre nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.** *On a la majoration*

$$\text{card}\{\mathbf{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1} \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c\} \ll P_1^{n+1-\lambda}.$$

De plus, l'ensemble  $\mathcal{A}_{1,\lambda}^c$  des vecteurs  $\mathbf{x}$  tels que  $\dim V_{3,\mathbf{x}}^* \geq \lambda$  ou  $\dim V_{2,\mathbf{x}}^* \geq \lambda$  est un fermé de Zariski de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ .

*Démonstration.* On commence par montrer que  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$  est un fermé de Zariski de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ . On aura alors de la même manière que  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{2,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$  est un fermé, et donc que  $\mathcal{A}_{1,\lambda}^c$  est un fermé de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ .

Notons  $Y$  le fermé de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$  défini par :

$$Y = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

La projection canonique

$$\pi : Y \subset \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1},$$

est un morphisme projectif, donc fermé. Par conséquent, d'après [G-D, Corollaire 13.1.5],

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim Y_{\mathbf{x}} \geq \lambda - 1\}$$

est un fermé, et puisque  $\dim Y_{\mathbf{x}} = \dim V_{3,\mathbf{x}}^* - 1$ , l'ensemble

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$$

est un fermé de Zariski de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ .

Nous allons à présent montrer que  $\dim \mathcal{A}_{1,\lambda}^c \leq n + 1 - \lambda$ . Pour cela nous allons montrer que la dimension de

$$\mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\mathbf{x}}^* \geq \lambda\}$$

est inférieure à  $n + 1 - \lambda$ . On remarque que

$$Y \cap (\mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n) = \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c} \pi^{-1}(\mathbf{x}).$$

On a alors

$$\dim \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c + \lambda - 1 \leq \dim Y = \dim V_3^* - 1 = n,$$

ce qui implique

$$\dim \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c \leq n + 1 - \lambda.$$

Ainsi,  $\dim \mathcal{A}_{1,\lambda}^c \leq n + 1 - \lambda$ , et donc

$$\text{card}\{\mathbf{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1} \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c\} \ll P_1^{n+1-\lambda}$$

(cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]) □

On déduit en particulier de ce lemme que les ensembles  $\mathcal{A}_{i,\lambda}$  sont des ouverts de Zariski. On notera dorénavant  $U$  l'ouvert de  $V$  :

$$(44) \quad U = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}_{1,\lambda} \times \mathcal{A}_{2,\lambda} \times \mathcal{A}_{3,\lambda} \mid \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, \\ \max_j |B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \neq 0, \max_i |B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \neq 0 \text{ et } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}.$$

Notre objectif est d'établir, pour cet ouvert  $U$ , une formule asymptotique pour  $N_U(B)$  (avec les notations de (1)) pour un choix du paramètre  $\lambda$  que nous précisons ultérieurement. À cette fin, nous allons chercher à donner une formule asymptotique pour

$$(45) \quad N_U(P_1, P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, \max_j |B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \neq 0, \\ \max_i |B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \neq 0 \text{ et } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\} \\ = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \cap (P_1\mathcal{B}_1 \times P_2\mathcal{B}_2 \times P_3\mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{3n+3}\}.$$

Pour  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ , par des méthodes analogues à celles développées dans la section précédente, nous allons d'abord établir une formule asymptotique pour

$$(46) \quad N_1(P_1, P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0 \text{ et } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}.$$

Ce qui nous permettra d'établir une formule asymptotique pour  $N_U(P_1, P_2, P_3)$  pour le cas où  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$  (par symétrie on en déduira la même formules pour les autres cas).

### 3.1 Sommes d'exponentielles

Pour tout ce qui va suivre, on fixe  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ . On pose

$$(47) \quad N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0 \text{ et } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}.$$

On a alors

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \int_0^1 S_{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha,$$

pour

$$(48) \quad S_{\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})).$$

Nous allons donc, dans un premier temps, chercher une formule asymptotique pour  $S_{\mathbf{x}}(\alpha)$ . Pour tous réels strictement positifs,  $H_1, H_2$  on notera

$$M_{\mathbf{x}}^2(H_1, H_2) = \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{z}| \leq H_1, \forall j \in \{0, \dots, n\} \|\alpha B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})\| < H_2\},$$

$$M_{\mathbf{x}}^3(H_1, H_2) = \text{card}\{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{y}| \leq H_1, \forall k \in \{0, \dots, n\} \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < H_2\}.$$

Remarquons avant tout que l'on a

$$|S_{\mathbf{x}}(\alpha)| \ll \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \prod_{k=0}^n \min\{P_3, \|\alpha B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|^{-1}\}.$$

À partir de là, on montre comme dans la section 2.1 que :

$$|S_{\mathbf{x}}(\alpha)| \leq M_{\mathbf{x}}^3(P_2, P_3^{-1}) P_3^{n+1} \log(P_3)^{n+1},$$

On établit alors le lemme ci-dessous :

**Lemme 3.2.** *Soit  $P > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit,  $\theta_2 \in [0, 1]$ , et  $\kappa > 0$ . L'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1.  $|S_{\mathbf{x}}(\alpha)| \leq P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-\kappa+\varepsilon},$
2.  $\max_{i \in \{2,3\}} M_{\mathbf{x}}^i(P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}) \gg P_2^{(n+1)\theta_2} P^{-\kappa}.$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser à nouveau le lemme 2.2, avec

$$(\lambda_{k,j})_{k,j} = \left( \alpha \sum_{i=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i \right)_{k,j},$$

$$aZ_2 = P_2, \quad a^{-1}Z_2 = P_3^{-1}, \quad aZ_1 = P_2^{\theta_2}, \quad a^{-1}Z_1 = P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1},$$

et on obtient immédiatement le résultat, comme dans la section 2.2.  $\square$

On considère un élément  $\mathbf{y} \in M_{\mathbf{x}}^3(P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1})$ . Supposons qu'il existe un certain  $k_0 \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ . On note alors  $q = |B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \geq 1$  et on pose  $\alpha |B_{k_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = a + \delta$ , avec  $a \in \mathbf{Z}$  et  $|\delta| < P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}$ . On a donc

$$|q\alpha - a| < P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \quad |q| \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}.$$

Quitte à changer  $\theta_2$ , on peut supposer

$$|q\alpha - a| < \frac{1}{2} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}, \quad |q| \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}.$$

D'où le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** *Soient  $P, \varepsilon, \kappa > 0$  et  $\theta_2 \in [0, 1]$  fixés. Il existe une constante  $C_1$  telle que l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.  $|S_{\mathbf{x}}(\alpha)| \leq P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-\kappa+\varepsilon}$ ,
2. Il existe des entiers  $a, q$  tels que  $1 \leq q \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}$  et  $\text{pgcd}(a, q) = 1$ ,  
 $2|q\alpha - a| \leq P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}$ ;
3. On a

$$\begin{aligned} \text{card}\{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{y}| \leq P_2^{\theta_2}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \forall k \in \{0, \dots, n\}\} \geq C_1 P_2^{(n+1)\theta_2} P^{-\kappa}. \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\mathbf{z}| \leq P_2^{\theta_2}, B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \\ \forall j \in \{0, \dots, n\}\} \geq C_1 P_2^{(n+1)\theta_2} P^{-\kappa}. \end{aligned}$$

On choisit à présent  $P = P_2 P_3$  et soit  $\theta$  tel que  $P_2^{\theta_2} = P^\theta$ . On a alors  $P_2^{(n+1)\theta_2} P^{-\kappa} = P^{(n+1)\theta - \kappa}$ . Par conséquent, les conditions 3 et 4 impliquent respectivement que  $P^{\theta \dim V_{3,\mathbf{x}}^*} \gg P^{\theta((n+1) - \frac{\kappa}{\theta})}$  et  $P^{\theta \dim V_{2,\mathbf{x}}^*} \gg P^{\theta((n+1) - \frac{\kappa}{\theta})}$  (cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]). On pose à présent  $K_1 = (n+1) - \lambda$  et on choisit  $\kappa = K_1 \theta$ . On a par ailleurs, puisque  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ ,  $\dim V_{3,\mathbf{x}}^* \leq \lambda - 1$  et  $\dim V_{2,\mathbf{x}}^* \leq \lambda - 1$ . Par conséquent, si les conditions 3 ou 4 sont vraies, alors il existe une constante  $C_2$  telle que :

$$C_1 P^{\theta(n+1) - K_1 \theta} < C_2 P_2^{\theta_2(\lambda-1)} = C_2 P^{\theta(\lambda-1)},$$

ce qui équivaut à dire que :

$$P^\theta < C_2 / C_1.$$

D'où le résultat ci-dessous :

**Lemme 3.4.** *Il existe une constante  $C_3$  telle que, si  $0 < \theta \leq 1$  et  $P^\theta \geq C_3$ , alors au moins l'une de assertions ci-dessous est vraie :*

1.  $|S_{\mathbf{x}}(\alpha)| \leq P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K_1 \theta + \varepsilon}$ ,
2. Il existe des entiers  $a, q$  tels que  $1 \leq q \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}$  et  $\text{pgcd}(a, q) = 1$ ,  
 $2|q\alpha - a| \leq P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}$ .

### 3.2 La méthode du cercle

Pour des entiers  $a, q$  tels que  $\text{pgcd}(a, q) = 1$ ,  $|q| \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}$ , on définit les arcs majeurs :

$$(49) \quad \mathfrak{M}_{a,q}^{\mathbf{x}}(\theta) = \{\alpha \in [0, 1] \mid 2|q\alpha - a| \leq P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}\},$$

$$(50) \quad \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta) = \bigcup_{1 \leq q \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{\mathbf{x}}(\theta),$$

$$(51) \quad \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \{\alpha \in [0, 1] \mid 2|q\alpha - a| \leq qP_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\},$$

$$(52) \quad \mathfrak{M}'^{\mathbf{x}}(\theta) = \bigcup_{1 \leq q \leq |\mathbf{x}|P_2^{\theta_2}} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta).$$

**Lemme 3.5.** *Si l'on suppose  $|\mathbf{x}|^2P_2^{-1+3\theta_2}P_3^{-1} < 1$  alors les arcs majeurs  $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$  sont disjoints deux à deux.*

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde qu'il existe  $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$ , avec  $a, q, a', q'$  vérifiant les hypothèses mentionnée précédemment. On a alors :

$$\frac{1}{qq'} \leq \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leq P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},$$

et ceci implique

$$1 \leq qq'P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1} \leq |\mathbf{x}|^2P_2^{-1+3\theta_2}P_3^{-1}$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme.  $\square$

A partir d'ici, on supposera  $P^\theta > C_3$ , et on supposera que l'on a bien  $|\mathbf{x}|^2P_2^{-1+3\theta_2}P_3^{-1} < 1$ . On suppose de plus que  $K_1 > 2$ . On définit par ailleurs :  $\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|P_2^{\theta_2} = |\mathbf{x}|P^\theta$ , et  $\Delta(\theta, K_1) = \theta(K_1 - 2) > 0$ .

**Lemme 3.6.** *Pour un  $\varepsilon > 0$  fixé, on a la formule asymptotique :*

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)} S_{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + O\left(|\mathbf{x}|P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon}P_3^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon}\right).$$

*Démonstration.* On a

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)} S_{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + O(\mathcal{E}(\mathbf{x})),$$

avec  $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta)} |S_{\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha$ . Remarquons que l'on a

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta)) \ll \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1} \ll |\mathbf{x}|P_2^{-1+2\theta_2}P_3^{-1}.$$

On choisit une suite de réels  $0 < \theta = \theta'_0 < \theta'_1 < \dots < \theta'_T = \frac{1}{2}$ , avec  $2(\theta'_{i+1} - \theta'_i) < \varepsilon$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . De plus,  $\varepsilon$  étant fixé, on peut

supposer  $T \ll P^\varepsilon$ . On a alors que

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta'_T)} |S_{\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll P_2^{n+1+\varepsilon} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-K_1 \theta'_T} \\
&\ll P_2^{n+1-K_1 \theta'_T + \varepsilon} P_3^{n+1-K_1 \theta'_T + \varepsilon} \\
&\ll P_2^{n-\Delta(\theta'_T, K_1) + \varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta'_T, K_1) + \varepsilon} \\
&\ll P_2^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta'_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta'_i)} |S_{\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll \text{Vol}(\mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta'_{i+1})) P_2^{n+1+\varepsilon} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-K_1 \theta'_i} \\
&\ll |\mathbf{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{2\theta'_{i+1} - K_1 \theta'_i} \\
&= |\mathbf{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{2(\theta'_{i+1} - \theta'_i) - (K_1 - 2)\theta'_i} \\
&\ll |\mathbf{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{\varepsilon - \Delta(\theta'_i, K_1)} \\
&\ll |\mathbf{x}| P_2^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon'} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon'}
\end{aligned}$$

Et on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{x}) &\ll \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta_T)} |S_{\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha \\
&+ \sum_{i=0}^T \int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\mathbf{x}}(\theta_i)} |S_{\mathbf{x}}(\alpha)| d\alpha \ll |\mathbf{x}| P_2^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon''} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1) + \varepsilon''}.
\end{aligned}$$

□

### 3.3 Les arcs majeurs

Dans tout ce qui suit, pour un  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$  fixé (avec un  $\lambda$  que nous supposons inférieur à  $n$ ),  $a, q \in \mathbf{Z}$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$ , on introduit les notations suivantes :

$$(53) \quad S_{a,q}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{b}^{(1)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \sum_{\mathbf{b}^{(2)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\mathbf{x}, \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)})\right),$$

$$(54) \quad I_{\mathbf{x}}(\beta) = \int_{\mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})) d\mathbf{v} d\mathbf{w}.$$

**Lemme 3.7.** Soient  $a, q \in \mathbf{Z}$  tels que  $1 \leq q \leq |\mathbf{x}| P_2^{\theta_2} = |\mathbf{x}| P^\theta$ ,  $0 \leq a < q$ ,  $\text{pgcd}(a, q) = 1$  et soit  $\alpha \in \mathcal{M}'_{a,q}(\theta)$ . On pose alors  $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ . On a alors que :

$$S_{\mathbf{x}}(\alpha) = P_2^{n+1} P_3^{n+1} q^{-2n-2} S_{a,q}(\mathbf{x}) I_{\mathbf{x}}(P\beta) + O(|\mathbf{x}|^2 P_2^{n+2\theta_2} P_3^{n+1}).$$



*Démonstration.* On commence par écrire

$$S_{\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \\ + \text{card}\{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2 \mid \forall k \in \{0, \dots, n\}, B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} P_3^{n+1}.$$

Puisque  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ , on obtient :

$$S_{\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3} e(\alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) + O(P_2^{\lambda-1} P_3^{n+1}),$$

que l'on peut réécrire :

$$S_{\mathbf{x}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{b}^{(1)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \sum_{\mathbf{b}^{(2)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{\alpha}{q} F(\mathbf{x}, \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)})\right) S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) \\ + O(P_2^{\lambda-1} P_3^{n+1})$$

avec

$$S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) = \sum_{\substack{q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(1)} \in P_2 \mathcal{B}_2 \\ q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(2)} \in P_3 \mathcal{B}_3}} e(\beta F(\mathbf{x}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(2)})).$$

On remarque que, pour  $\mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{z}', \mathbf{z}''$  tels que  $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| \ll 1$  et  $|\mathbf{z}' - \mathbf{z}''| \ll 1$ , on a

$$|F(\mathbf{x}, q\mathbf{y}' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{z}' + \mathbf{b}^{(2)}) - F(\mathbf{x}, q\mathbf{y}'' + \mathbf{b}^{(1)}, q\mathbf{z}'' + \mathbf{b}^{(2)})| \ll q|\mathbf{x}|P_2 + q|\mathbf{x}|P_3 \ll q|\mathbf{x}|P_3$$

On a donc, en remplaçant la série par une intégrale, que

$$S_3(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) = \int_{\substack{q\tilde{\mathbf{v}} \in P_2 \mathcal{B}_2 \\ q\tilde{\mathbf{w}} \in P_3 \mathcal{B}_3}} e(\beta F(\mathbf{x}, q\tilde{\mathbf{v}}, q\tilde{\mathbf{w}})) d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{w}} \\ + O\left(|\beta|q|\mathbf{x}|P_3 \left(\frac{P_3}{q} \frac{P_2}{q}\right)^{n+1} + \left(\frac{P_2}{q}\right)^n \left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1}\right) \\ = P_2^{n+1} P_3^{n+1} q^{-2n-2} I_{\mathbf{x}}(P\beta) + O\left(q^{-2n-1} |\mathbf{x}| P_2^{n+\theta_2} P_3^{n+1}\right),$$

par changement de variables  $\mathbf{v} = qP_2^{-1}\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\mathbf{w} = qP_3^{-1}\tilde{\mathbf{w}}$ . On en déduit finalement :

$$S_{\mathbf{x}}(\alpha) = P_2^{n+1} P_3^{n+1} q^{-2n-2} S_{a,q}(\mathbf{x}) I_{\mathbf{x}}(P\beta) + O(E),$$

avec

$$E = P_2^{\lambda-1} P_3^{n+1} + \sum_{\mathbf{b}^{(1)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \sum_{\mathbf{b}^{(2)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} q^{-2n-1} |\mathbf{x}| P_2^{n+\theta_2} P_3^{n+1} \\ \ll |\mathbf{x}| q P_2^{n+\theta_2} P_3^{n+1} \ll |\mathbf{x}|^2 P_2^{n+2\theta_2} P_3^{n+1}.$$

□

À partir d'ici on notera :

$$(55) \quad \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(Q) = \sum_{q \ll Q} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\mathbf{x})$$

$$(56) \quad J_{\mathbf{x}}(\phi) = \int_{|\beta| \leq \phi} I_{\mathbf{x}}(\beta) d\beta.$$

**Lemme 3.8.** *Si  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ , on a, pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) &= P_2^n P_3^n \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x})) J_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2} P_2^{\theta_2}\right) \\ &\quad + O(|\mathbf{x}|^4 P_2^{n-1+5\theta_2} P_3^n + |\mathbf{x}| P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On notera  $E_1 = |\mathbf{x}| P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon}$ . Par application des lemmes 3.6 et 3.7, on a :

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) &= \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)} S_{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + O(E_1) \\ &= P_2^{n+1} P_3^{n+1} \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\mathbf{x}) \int_{|\beta| \leq \frac{1}{2} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}} I_{\mathbf{x}}(P_2 P_3 \beta) d\beta \\ &\quad + O(E_1) + O(E_2), \end{aligned}$$

avec  $E_2 = \text{Vol}(\mathfrak{M}'^{\mathbf{x}}(\theta)) |\mathbf{x}|^2 P_2^{n+2\theta_2} P_3^{n+1}$ . On remarque que :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathfrak{M}'^{\mathbf{x}}(\theta)) &\ll \sum_{q \leq \phi(\mathbf{x})} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1} \\ &\ll P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1} (|\mathbf{x}| P_2^{\theta_2})^2 \\ &\ll |\mathbf{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E_2 \ll |\mathbf{x}|^4 P_2^{n-1+5\theta_2} P_3^n,$$

d'où le résultat. □

**Lemme 3.9.** *Soit  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ . On suppose que l'on a de plus  $K_1 > 2$ . Alors, l'intégrale  $J_{\mathbf{x}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\mathbf{x}}(\beta) d\beta$  est absolument convergente, et on a :*

$$\left| J_{\mathbf{x}} - J_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2} P_2^{\theta_2}\right) \right| \ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')}$$

(pour un  $\varepsilon' > 0$  arbitrairement petit), et on a  $|J_{\mathbf{x}}| \ll 1$ .

*Démonstration.* On considère un réel  $\beta$  tel que  $|\beta| > C_3$ . On choisit  $\theta', \theta'_2$  et  $P_3$  tels que  $2|\beta| = P^{\theta'} = P_2^{\theta'_2}$  et  $P^{-K_1\theta'} = |\mathbf{x}|^2 P_2^{-1+2\theta'_2}$  (avec  $P = P_2 P_3$ ). Remarquons que cette dernière condition implique :

$$|\mathbf{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} = P^{(-K_1+1)\theta'} P_3^{-1} < 1$$

et donc la condition du lemme 3.5 est satisfaite. On a alors, d'après le lemme 3.4, si  $P^{\theta'} > C_3$  alors :

$$|S_{\mathbf{x}}(P^{-1}\beta)| < P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K_1\theta'+\varepsilon},$$

(car  $P^{-1}\beta$  appartient au bord de  $\mathfrak{M}_{0,1}^{\mathbf{x}}(\theta')$ ). On a par ailleurs, d'après le lemme 3.7 appliqué à  $(a, q) = (0, 1)$  :

$$P^{n+1}|I_{\mathbf{x}}(\beta)| \ll |S_{\mathbf{x}}(P^{-1}\beta)| + O(|\mathbf{x}|^2 P_2^{n+2\theta'_2} P_3^{n+1}).$$

On obtient alors la borne

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{x}}(\beta) &\ll P^{\varepsilon-K_1\theta'} + |\mathbf{x}|^2 P_2^{-1+2\theta'_2} \\ &\ll P^{\varepsilon-K_1\theta'} \\ &= |\beta|^{-K_1+\varepsilon/\theta'} \\ &\ll |\beta|^{-K_1+\varepsilon/\theta} = |\beta|^{-K_1+\varepsilon'} \end{aligned}$$

( $\theta$  étant fixé). Par conséquent, si  $P^{\theta'} > C_3$ , on a que

$$\begin{aligned} \left| J_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right) - J_{\mathbf{x}} \right| &\ll \int_{|\beta| > \frac{1}{2}P_2^{\theta_2}} |\beta|^{\varepsilon'-K_1} d\beta \\ &\ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on choisit  $P_2$  très petit (de sorte que  $\frac{1}{2}P_2^{\theta_2} \asymp C_3$ ), on obtient  $|J_{\mathbf{x}}(C_3) - J_{\mathbf{x}}| \ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')} \ll 1$ , et donc  $|J_{\mathbf{x}}| \ll 1$  (car  $|J_{\mathbf{x}}(C_3)| \ll 1$ ).  $\square$

**Lemme 3.10.** Soit  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ . On suppose que l'on a  $K_1 > 2$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, la série

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{x}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\mathbf{x})$$

converge absolument, et on a

$$|\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x})) - \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon)}.$$

On a de plus la borne  $|\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon}$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $S_{a,q}(\mathbf{x}) = S_{\mathbf{x}}(\alpha)$  pour  $P_2 = P_3 = q$  et  $\alpha = \frac{a}{q} \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$ . Supposons  $\theta' \in [0, 1]$  tel que  $q^{\theta'} > C_3$ , alors, par le lemme 3.4, on a :

$$|S_{a,q}(\mathbf{x})| < q^{2(n+1)-K_1\theta'+\varepsilon}$$

ou alors il existe  $q', a' \in \mathbf{Z}$  tels que  $1 \leq q' \leq |\mathbf{x}|q^{\theta'}$  et  $|q'a - a'q| \leq q^{-1+\theta'}$ . Ce deuxième cas est alors impossible lorsque  $q' \neq q$ , donc en particulier lorsque  $|\mathbf{x}|q^{\theta'} < q$ . Quitte à supposer  $q$  tel que  $q > C_3|\mathbf{x}|$ , on choisit alors  $\theta'$  tel que  $q^{\theta'} = |\mathbf{x}|^{-1}q^{-\varepsilon+1}$ , et on a alors

$$|S_{a,q}(\mathbf{x})| < q^{2(n+1)-K_1\theta'+\varepsilon} = q^{2(n+1)-K_1+\varepsilon'}|\mathbf{x}|^{K_1}.$$

On remarque par ailleurs que pour  $P^\theta = P_2^{\theta_2} > C_3$ , on a  $\phi(\mathbf{x}) = P_2^{\theta_2}|\mathbf{x}| > C_3|\mathbf{x}|$ , et donc, par ce qui précède on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x})) - \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| &\ll \sum_{q > \phi(\mathbf{x})} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q}(\mathbf{x})| \\ &\ll \sum_{q > \phi(\mathbf{x})} q^{1-K_1+\varepsilon'}|\mathbf{x}|^{K_1} \\ &\ll P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon')}|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon'}. \end{aligned}$$

Par le même calcul, on trouve :  $|\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(C_3|\mathbf{x}|) - \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon'}$  et en utilisant l'estimation triviale  $|\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(C_3|\mathbf{x}|)| \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon'}$  (obtenue en majorant trivialement  $S_{a,q}(\mathbf{x})$  par  $q^{2n+2}$ ), on a alors  $|\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon'}$ .  $\square$

**Lemme 3.11.** *Soit  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ . On suppose que l'on a  $0 < \theta \leq 1$  et  $P_2 \geq 1$  tel que  $P_2^{\theta_2} > C_3$  et tel que  $|\mathbf{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} < 1$ . On suppose de plus que  $K_1 > 2$ . Pour un  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on a la formule suivante :*

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} P_2^n P_3^n + O(E_2(\mathbf{x})) + O(E_3(\mathbf{x})),$$

avec

$$\begin{aligned} E_2(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}|^4 P_2^{n-(1-5\theta_2)} P_3^n, \\ E_3(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon} P_3^n. \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après le lemme 3.8 on a

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = P_2^n P_3^n \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x})) J_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} P_2^{\theta_2} \right) + O(E_1) + O(E_2),$$

avec  $E_1 = |\mathbf{x}| P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon}$ . On a donc  $E_1 \ll E_3$ . De plus, par les lemmes 3.9 et 3.10 :

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} - \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x})) J_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} P_2^{\theta_2} \right) \right| \\
& \ll |\mathfrak{S}_{\mathbf{x}} - \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{x}))| \left| J_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} P_2^{\theta_2} \right) \right| + |\mathfrak{S}_{\mathbf{x}}| \left| J_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} P_2^{\theta_2} \right) - J_{\mathbf{x}} \right| \\
& \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon)} + P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon)} |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} \\
& \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1)+\varepsilon} \\
& \ll |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{-\Delta(\theta_2, K_1)+\varepsilon} \leq |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon},
\end{aligned}$$

(rappelons que  $\theta(1 + \frac{b'}{b}) = \theta_2$ , donc  $\theta \leq \theta_2$  et  $\Delta(\theta, K_1) \leq \Delta(\theta_2, K_1)$ ). D'où le résultat.  $\square$

On a en particulier le corollaire suivant :

**Corollaire 3.12.** *Si  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$  et si  $K_1 > 2$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} P_2^n P_3^n + O(|\mathbf{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$

*uniformément pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $|\mathbf{x}| < (P_2^{1-3\theta_2} P_3)^{\frac{1}{2}}$  (pour un  $\theta_2 < \frac{1}{5}$  fixé).*

On pose pour tout  $\delta > 0$  :

$$(57) \quad g_1(b, b', \delta) = \left(1 + \frac{b'}{b}\right) \left(1 - \frac{5}{b} - \delta\right)^{-1} 5 \left(\frac{3}{b} + 2\delta\right).$$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 3.13.** *Soit  $\delta > 0$ . On suppose que l'on a  $\frac{5}{b} + \delta < 1$  (où  $P_2 = P_1^b$ ). De plus, si  $K_1 = n + 1 - \lambda$  vérifie :*

$$K_1 - 2 > g_1(b, b', \delta),$$

*et si  $P_2^{\frac{1-\delta-5/b}{5}} > C_3$  alors :*

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = P_2^n P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n).$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3).$$

Donc pour  $\theta, \theta_2$  satisfaisant les hypothèses du lemme 3.11, on a :

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = P_2^n P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &= \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} E_2(\mathbf{x}) \\
&= P_2^{n-1+5\theta_2} P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} |\mathbf{x}|^4 \\
&\ll P_1^{n+5} P_2^{n-1+5\theta_2} P_3^n \\
&= P_1^n P_2^n P_3^n P_2^{-1+5\theta_2+5/b},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} E_3(\mathbf{x}) \\
&= P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+\varepsilon} P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} |\mathbf{x}|^{2+\varepsilon} \\
&\ll P_1^{n+3} P_2^{n-\Delta(\theta, K_1)+2\varepsilon} P_3^n \\
&= P_1^n P_2^n P_3^n P_2^{3/b-\Delta(\theta, K_1)+2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On choisit ensuite  $\theta_2$  tel que  $-1 + 5\theta_2 + 5/b = -\delta$  (ce qui est possible, car on a  $5/b + \delta < 1$ , par hypothèse) et donc  $\theta_2 = (1 - 5/b - \delta)/5$ . L'hypothèse  $K_1 - 2 > g_1(b, b', \delta)$  implique

$$\begin{aligned}
K_1 - 2 &> \left(1 + \frac{b'}{b}\right) \left(1 - \frac{5}{b} - \delta\right)^{-1} 5 \left(\frac{3}{b} + 2\delta\right) \\
&= \left(1 + \frac{b'}{b}\right) \theta_2^{-1} \left(\frac{3}{b} + 2\delta\right) \\
&= \theta^{-1} \left(\frac{3}{b} + 2\delta\right)
\end{aligned}$$

(car  $\theta_2 = \theta(1 + \frac{b'}{b})$ ). On a alors

$$\Delta(\theta, K_1) = \theta(K_1 - 2) > \left(\frac{3}{b} + 2\delta\right).$$

On en déduit :

$$3/b - \Delta(\theta, K_1) + 2\varepsilon < -2\delta + 2\varepsilon < -\delta$$

(pour  $\varepsilon$  assez petit). On a donc démontré la proposition pour  $P_2^{\theta_2} = P_2^{\frac{1-\delta-5/b}{5}} > C_3$ .  $\square$

## 4 Troisième étape

On notera  $b_1$  le réel strictement supérieur à 5 minimisant la fonction  $g_1(b, b+1+\nu, \delta) + (b + (b+1+\nu) + 1 + \delta) + 2$ , pour  $\delta, \nu > 0$  fixés et arbitrairement petits.

**Remarque 4.1.** *On peut en fait vérifier que  $b_1 \in [8, 9]$ , pour  $\delta, \nu$  assez petits, et que le minimum obtenu est strictement inférieur à 29.*

On pose  $b'_1 = b_1 + 1 + \nu$ . On supposera dorénavant que

$$n+1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b'_1 + \delta + 3$$

(ceci est en particulier vrai lorsque  $n \geq 28$ , d'après la remarque précédente). Si  $P_1 > 1$  est fixé quelconque et  $P_2 = P_1^{b_1}$ ,  $P_3 = P_1^{b'_1}$ , alors par la proposition 2.12, on a :

$$(58) \quad N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^{n-\delta} P_3^{n-\delta}).$$

On remarque d'autre part que

$$(59) \quad N(P_1, P_2, P_3) = N_1(P_1, P_2, P_3) + O\left(\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c} P_2^{n+1} P_3^{n+1}\right)$$

$$(60) \quad = N_1(P_1, P_2, P_3) + O\left(P_1^{n+1-\lambda} P_2^{n+1} P_3^{n+1}\right)$$

(d'après le lemme 3.1). A partir d'ici nous fixerons  $\lambda = \lceil b_1 + b'_1 + 1 + \delta \rceil$ , de sorte que :

$$P_1^{n+1-\lambda} P_2^{n+1} P_3^{n+1} \ll P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n.$$

Enfin, puisque  $n+1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + \lambda + 2$  (i.e.  $K_1 - 2 > g_1(b_1, b'_1, \delta)$ ), la proposition 3.13 donne

$$(61) \quad N_1(P_1, P_2, P_3) = P_2^n P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n).$$

Ainsi, en regroupant les formules (58), (59) et (61), on trouve :

$$P_2^n P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n),$$

et donc

$$\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} = \sigma P_1^n + O(P_1^{n-\delta}),$$

et cette relation est indépendante de  $P_2, P_3$ . On a donc établi le lemme ci-dessous :

**Lemme 4.2.** *Si l'on a  $n + 1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2$  (en particulier, si  $n \geq 28$ ), alors pour tout  $P_1 \geq 1$  :*

$$\sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} = \sigma P_1^n + O(P_1^{n-\delta}).$$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 4.3.** *On suppose que l'on a  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ ,  $P_2 = P_1^b$  et  $P_3 = P_1^{b'}$ . On suppose de plus que  $b' \leq b + 1 + \nu$  et que*

$$n + 1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b'_1 + \delta$$

( $\delta, \nu > 0$  étant fixés et arbitrairement petits). On a alors que

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

*Démonstration.* – Premier cas : on suppose  $b_1 \leq b$ . On a puisque  $b' \leq b + 1 + \nu$  :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b'}{b} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{b} + \frac{\nu}{b} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{b_1} + \frac{\nu}{b_1} \\ &= 1 + \frac{b_1 + 1 + \nu}{b_1} \\ &= 1 + \frac{b'_1}{b_1}. \end{aligned}$$

On a également

$$\left(1 - \frac{5}{b} - \delta\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{5}{b_1} - \delta\right)^{-1}$$

(en effet, puisque  $b_1 \leq b$  et  $b_1 \in [8, 9]$ , on a  $\frac{5}{b} + \delta \leq \frac{5}{b_1} + \delta < 1$ ) et

$$\left(\frac{3}{b} + 2\delta\right) \leq \left(\frac{3}{b_1} + 2\delta\right).$$

Ceci implique

$$g_1(b, b', \delta) \leq g_1(b_1, b'_1, \delta) < K_1 - 2.$$

Ainsi, par la proposition 3.13, on obtient

$$\begin{aligned} N_1(P_1, P_2, P_3) &= P_2^n P_3^n \sum_{\mathbf{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n) \\ &= \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n) \end{aligned}$$

(d'après le lemme 4.2).



Deuxième cas : supposons  $b_1 > b$ . On a alors

$$b' \leq 1 + b + \nu < 1 + b_1 + \nu = b'_1,$$

donc

$$b' + b + 1 \leq b'_1 + b_1 + 1 < n + 1$$

et on peut alors appliquer la proposition 2.12, et on a :

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^{n-\delta} P_3^{n-\delta}).$$

Par conséquent, en utilisant (59), puisque  $\lambda = \lceil b_1 + b'_1 + 1 + \delta \rceil \geq \lceil b + b' + 1 + \delta \rceil$ , on trouve bien

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n).$$

□

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 4.4.** *On suppose que l'on a  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ ,  $P_2 = P_1^b$  et  $P_3 = P_1^{b'}$ . On suppose de plus que  $b' \leq b + 1 + \nu$  et que*

$$n + 1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b'_1 + \delta$$

*( $\delta, \nu > 0$  étant fixés et arbitrairement petits). On a alors que*

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

*Démonstration.* Rappelons que, par définition :

$$\begin{aligned} N_U(P_1, P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2) \\ \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, \max_j |B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \neq 0, \\ \max_i |B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \neq 0, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = N_1(P_1, P_2, P_3) + O(T_1) + O(T_2) + O(T_3) + O(T_4),$$

où

$$(62) \quad T_1 = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_2 \mathcal{B}_2) \\ \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(63) \quad T_2 = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2 \mathcal{B}_2) \\ \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

$$(64) \quad T_3 = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \ \forall j\},$$

$$(65) \quad T_4 = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \ \forall i\}.$$

On remarque que, d'après le lemme 3.1

$$T_1 \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1-\lambda} P_3^{n+1} = P_1^{n+1+b'-(\lambda-1)b} P_2^n P_3^n.$$

Or, on a fixé  $\lambda = \lceil b_1 + b'_1 + 1 + \delta \rceil$ , avec  $5 < b_1 \leq b'_1$ , on a donc clairement  $n + 1 + b' - (\lambda - 1)b \leq n + 1 + b' - 5b \leq n - 1$  puisque  $b' \leq b + 1 + \nu$  et  $b \geq 1$ . On a donc  $T_1 \ll P_1^{n-1} P_2^n P_3^n$ . De la même manière, on montre que  $T_2 \ll P_1^{n-1} P_2^n P_3^n$ .

Par ailleurs, pour  $\mathbf{x}$  fixé, si  $B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$  pour tout  $j$ , alors  $\mathbf{z} \in V_{3,\mathbf{x}}^*$ . Par conséquent, puisque pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ ,  $\dim V_{3,\mathbf{x}}^* < \lambda$ , on a alors :

$$T_3 \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^\lambda = P_1^{n-1} P_2^n P_3^n,$$

car  $n+1 > \lambda+3$  (car  $n+1 > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2$ ,  $g_1(b_1, b'_1, \delta) \geq 2$  et  $(b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2 \geq \lambda + 1$  par hypothèse). De même on montre que  $T_4 \ll P_1^{n-1} P_2^n P_3^n$ . En résumé on a donc

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = N_1(P_1, P_2, P_3) + O(P_1^{n-1} P_2^n P_3^n),$$

et la proposition 4.3 permet de conclure. □

## 5 Quatrième étape

Il nous reste donc à traiter le cas où  $b' \geq b + 1 + \nu$  (i.e.  $P_3 \geq P_1^{1+\nu} P_2$ ). Nous allons résoudre ce problème en utilisant des résultats de géométrie des réseaux.

Commençons par introduire la définition suivante (issue de [Wi, Définition 2.1]) :

**Définition 5.1.** Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^d$ , et soit  $c$  un entier tel que  $0 \leq c \leq d$ . Pour  $M \in \mathbf{N}$  et  $L > 0$ , on dit que  $S$  appartient à  $\text{Lip}(d, c, M, L)$  s'il existe  $M$  applications  $\phi : [0, 1]^{d-c} \rightarrow \mathbf{R}^d$  vérifiant :

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

$\|\cdot\|_2$  désignant la norme euclidienne, telles que  $S$  soit recouvert par les images de ces applications.

On a le résultat suivant (cf. [M-V, Lemme 2]) :

**Lemme 5.2.** *Soit  $S \subset \mathbf{R}^d$  un ensemble bordé dont le bord  $\partial S$  appartient à  $\text{Lip}(d, 1, M, L)$ . L'ensemble  $S$  est alors mesurable et si  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbf{R}^d$  de premier minimum successif  $\lambda_1$ , on a*

$$\left| \text{card}(S \cap \Lambda) - \frac{\text{Vol}(S)}{\det(\Lambda)} \right| \leq c(d)M \left( \frac{L}{\lambda_1} + 1 \right)^{d-1},$$

où  $c(d)$  est une constante ne dépendant que de  $d$ .

Pour un couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}$  fixé tel que  $\max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0$ , on note  $H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  l'hyperplan de  $\mathbf{R}^{n+1}$  donné par

$$H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k=0}^n B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) z_k = 0\}.$$

On note par ailleurs  $C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  le corps convexe  $\mathcal{B}_3 \cap H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  et  $\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  le réseau  $\mathbf{Z}^{n+1} \cap H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ . Nous allons appliquer le lemme 5.2 à  $S = P_3 C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  et  $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  vus respectivement comme un sous-ensemble et un réseau de  $H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  que l'on identifiera à  $\mathbf{R}^n$ . Remarquons dans un premier temps que  $\partial \mathcal{B}_3 \in \text{Lip}(n+1, 1, 2n, 2)$  : en effet, pour toute face  $F$  du cube  $\mathcal{B}_3$ , on peut construire une application  $\phi_F : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  qui est 2-lipschitzienne et telle que  $\phi_F([0, 1]^n) = F$ . Considérons par exemple la face  $F$  correspondant aux points  $\mathbf{z} \in \mathcal{B}_3$  tels que  $z_0 = 1$ . On pose alors  $\phi_F(t_1, \dots, t_n) = (1, 2t_1 - 1, \dots, 2t_n - 1)$  et on a bien  $\phi_F([0, 1]^n) = F$  et pour tous  $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in [0, 1]^n$

$$\|\phi_F(\mathbf{t}) - \phi_F(\mathbf{t}')\|_2 \leq 2\|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|_2.$$

Montrons à présent que  $\partial C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \in \text{Lip}(n, 1, 2n, 2(n-1)\sqrt{n+1})$ . Une face du polytope  $C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  est obtenue en prenant l'intersection d'une face  $F$  de  $\mathcal{B}_3$  avec  $H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ . Considérons par exemple l'intersection (supposée non vide) de la face  $F = \{\mathbf{z} \in \mathcal{B}_3 \mid z_0 = 1\}$  avec  $H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ . Pour simplifier les notations, on pose pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\alpha_k = B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de sorte que  $H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  a pour équation  $\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = 0$  (les  $\alpha_k$  étant non tous nuls). Pour tout  $\mathbf{z} \in F \cap H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ , on a alors  $\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = 0$ , avec  $\max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \neq 0$  puisque l'intersection  $F \cap H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  est non vide. Supposons, par exemple, que  $\max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| = |\alpha_n|$ , on a alors  $z_n = -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} z_k$ , et on peut construire l'application  $\tilde{\phi}_F : [0, 1]^{n-1} \rightarrow H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \subset \mathbf{R}^{n+1}$  définie par

$$\tilde{\phi}_F(t_1, \dots, t_{n-1}) = \left( 1, 2t_1 - 1, \dots, 2t_{n-1} - 1, -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} (2t_k - 1) \right).$$

On remarque alors que  $F \cap H_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \subset \tilde{\phi}_F([0, 1]^{n-1})$  et que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}_F(\mathbf{t}) - \tilde{\phi}_F(\mathbf{t}')\|_2 &\leq \sqrt{n+1} \|\tilde{\phi}_F(\mathbf{t}) - \tilde{\phi}_F(\mathbf{t}')\|_\infty \\ &\leq \sqrt{n+1} \max \left( 2, 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} \right) \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|_\infty \\ &\leq 2(n-1) \sqrt{n+1} \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|_2. \end{aligned}$$

On a donc  $\partial C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \in \text{Lip}(n, 1, 2n, 2(n-1)\sqrt{n+1})$  et par conséquent

$$\partial P_3 C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \in \text{Lip}(n, 1, 2n, 2(n-1)\sqrt{n+1} P_3).$$

De plus puisque  $\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \subset \mathbf{Z}^{n+1}$  le premier minimum successif de ce réseau est supérieur ou égal à 1. Ainsi, si l'on pose

(66)

$$N_{\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}, \mathcal{B}_3}(P_3) = \{\mathbf{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\} = \text{card}(\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \cap P_3 C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$$

le lemme 5.2 nous donne :

$$\left| N_{\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}, \mathcal{B}_3}(P_3) - \frac{\text{Vol}(P_3 C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\det(\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})} \right| \ll_n P_3^{n-1}.$$

On a donc que

$$(67) \quad N_{\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}, \mathcal{B}_3}(P_3) = \frac{\text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\det(\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})} P_3^n + O(P_3^{n-1}).$$

Par conséquent, si l'on note

$$\begin{aligned} N'(P_1, P_2, P_3) &= \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2) \\ &\quad \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0\}, \end{aligned}$$

on trouve

$$N'(P_1, P_2, P_3) = P_3^n \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \frac{\text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\det(\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})} + O \left( \sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} P_3^{n-1} \right).$$

On peut montrer par ailleurs (voir par exemple [HB, Lemme 1.(i)]) que

$$\det(\Lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2}{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} N'(P_1, P_2, P_3) &= P_3^n \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2, \lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \frac{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2} \\ &\quad + O(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n-1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque l'on a supposé  $b' \geq b + 1 + \nu$ , on a

$$P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n-1} \ll P_1^{n-\nu} P_2^n P_3^n.$$

Ainsi, on trouve

$$(68) \quad N'(P_1, P_2, P_3) = P_3^n \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \frac{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2} + O(P_1^{n-\nu} P_2^n P_3^n).$$

Nous allons à présent montrer que

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \frac{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2} = \sigma P_1^n P_2^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n)$$

pour un certain  $\delta' > 0$ . On remarque que

$$N'(P_1, P_2, P_3) = N_U(P_1, P_2, P_3) + O(T_5) + O(T_3) + O(T_4)$$

où

$$(69) \quad T_5 = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1 \mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2 \mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3 \mathcal{B}_3) \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

et  $T_3, T_4$  sont définis par (64) et (65). Nous avons déjà montré que  $T_3, T_4 \ll P_1^{n-1} P_2^n P_3^n$ . On a par ailleurs que

$$T_5 \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1-\lambda} \ll P_1^{n-1} P_2^n P_3^n$$

car  $\lambda \geq 4$ . Par conséquent

$$(70) \quad N'(P_1, P_2, P_3) = N_U(P_1, P_2, P_3) + O(P_1^{n-1} P_2^n P_3^n).$$

Par la suite, on choisit  $P_3$  tel que  $b' = b + 1 + \nu$ . D'après la proposition 4.4, la formule (70) donne :

$$N'(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n),$$

et en utilisant (68), on a alors :

$$\sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} \frac{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{Vol}(C_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})}{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2} = \sigma P_1^n P_2^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n),$$

pour  $\delta' = \min\{\delta, \nu\}$ , et ceci indépendamment de  $P_3$ .

Par conséquent, on déduit de (68) que

$$N'(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n)$$

pour tout  $n$  tel que  $(n+1) > g_1(b_1, b'_1, \delta) + (b_1 + b'_1 + 1 + \delta) + 2$ , et tous  $(b, b')$  tels que  $b' \geq b + 1 + \nu$ . Par conséquent, en utilisant la formule (70) on a, sous les mêmes hypothèses :

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n).$$

En regroupant ce résultat avec la proposition 4.4 on obtient la proposition suivante :

**Proposition 5.3.** *Si  $n \geq 28$ , alors pour tous  $P_1, P_2, P_3 \geq 1$ , il existe  $\delta' > 0$  tel que :*

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n).$$

## 6 Cinquième étape

Nous allons à présent utiliser la formule obtenue pour  $N_U(P_1, P_2, P_3)$  dans la proposition 5.3 pour trouver une formule asymptotique pour  $N_U(B)$ . Pour résoudre ce problème, nous allons appliquer la méthode développée par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour le cas des hypersurfaces diagonales des espaces multiprojectifs, et reprise dans la section 9 de [Sch2]. On considère une fonction  $h : \mathbf{N}^3 \rightarrow [0, +\infty[$ . Conformément aux notations de [B-B], on dira que  $h$  est une  $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$ -fonction si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. On a

$$\sum_{\substack{l \leq L \\ m \leq M \\ n \leq N}} h(l, m, n) = CL^\beta M^\beta N^\beta + O(L^\beta M^\beta N^\beta \min\{L, M, N\}^{-\delta})$$

pour tous  $L, M, N \geq 1$ .

2. Il existe des fonctions  $c_1, c_2, c_3 : \mathbf{N} \rightarrow [0, +\infty[$  telles que :

$$\sum_{\substack{m \leq M \\ n \leq N}} h(l, m, n) = c_1(l) M^\beta N^\beta + O\left(l^D M^\beta N^\beta \min\{M, N\}^{-\delta}\right),$$

uniformément pour tous  $M, N \geq 1$  et  $l \leq M^\alpha N^\alpha$ ,

$$\sum_{\substack{l \leq L \\ n \leq N}} h(l, m, n) = c_2(m) L^\beta N^\beta + O\left(m^D L^\beta N^\beta \min\{L, N\}^{-\delta}\right),$$

uniformément pour tous  $L, N \geq 1$  et  $m \leq L^\alpha N^\alpha$ ,

$$\sum_{\substack{l \leq L \\ m \leq M}} h(l, m, n) = c_3(n) L^\beta M^\beta + O\left(n^D L^\beta M^\beta \min\{L, M\}^{-\delta}\right)$$

uniformément pour tous  $L, M \geq 1$  et  $n \leq L^\alpha M^\alpha$ .

3. Il existe des fonctions  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 : \mathbf{N}^2 \rightarrow [0, +\infty[$  telles que :

$$\sum_{l \leq L} h(l, m, n) = \tilde{c}_1(m, n) L^\beta + O(\max\{m, n\}^D L^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous  $L \geq 1$  et  $\max\{m, n\} \leq L^\alpha$ ,

$$\sum_{m \leq M} h(l, m, n) = \tilde{c}_2(l, n) M^\beta + O(\max\{l, n\}^D M^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous  $M \geq 1$  et  $\max\{l, n\} \leq M^\alpha$ ,

$$\sum_{n \leq N} h(l, m, n) = \tilde{c}_3(l, m) N^\beta + O(\max\{l, m\}^D N^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous  $N \geq 1$  et  $\max\{l, m\} \leq N^\alpha$ .

On a la proposition suivante qui est un corollaire immédiat de [B-B, Théorème 2.1] :

**Proposition 6.1.** *Si  $h$  est une  $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$ -fonction, alors on a la formule asymptotique :*

$$\sum_{lmn \leq P} h(l, m, n) = \frac{1}{2} C \beta^2 P^\beta \log(P)^2 + O(P^\beta \log(P)).$$

Nous allons appliquer ce résultat à la fonction

$$h(l_1, l_2, l_3) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \mid |\mathbf{x}| = l_1, |\mathbf{y}| = l_2, |\mathbf{z}| = l_3, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}$$

(en remarquant que  $N_U(B) = \sum_{l_1 l_2 l_3 \leq B} h(l_1, l_2, l_3)$ ). Pour cela nous allons montrer que cette fonction est bien une  $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$ -fonction (pour des constantes  $C, \delta, \beta, \alpha, D$  que nous précisons).

Remarquons que cette fonction vérifie bien la condition 1 avec  $\beta = n$ , d'après la proposition 5.3. D'autre part, par le corollaire 3.12, on a pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$  et  $P_2 \leq P_3$  :

$$N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} P_2^n P_3^n + O(|\mathbf{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$

uniformément pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $|\mathbf{x}| < (P_2^{1-3\theta_2} P_3)^{\frac{1}{2}}$  pour un  $\theta_2 < \frac{1}{5}$  fixé. Donc en choisissant  $\theta_2 < \frac{1}{6}$ , la formule est vraie pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $|\mathbf{x}| \leq P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{2}}$ . Si l'on note

$$N_{U,\mathbf{x}}(P_2, P_3) = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (P_2 \mathcal{B}_2 \times P_3 \mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{2n+2} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}$$

On a alors que

$$N_{U,\mathbf{x}}(P_2, P_3) = N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) + O(T_{1,\mathbf{x}}) + O(T_{2,\mathbf{x}}) + O(T_{3,\mathbf{x}}) + O(T_{4,\mathbf{x}})$$

où

$$(71) \quad T_{1,\mathbf{x}} = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \\ | \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}$$

$$(72) \quad T_{2,\mathbf{x}} = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3\mathcal{B}_3) \\ | \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}$$

$$(73) \quad T_{3,\mathbf{x}} = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \\ | \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, \forall j B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\}$$

$$(74) \quad T_{4,\mathbf{x}} = \text{card}\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \\ | \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0, \forall i B''_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\}$$

En reprenant la formule (67), et en remarquant que, pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$\text{Vol}(C_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \ll 1$$

et

$$\frac{1}{|\det(\Lambda_{\mathbf{x},\mathbf{y}})|} = \frac{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2}{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))} \leq 1,$$

on obtient :

$$T_{1,\mathbf{x}} \ll \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2,\lambda}^c \cap P_2\mathcal{B}_2} P_3^n \ll P_2^{n+1-\lambda} P_3^n \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

On montre de même que

$$T_{2,\mathbf{x}} \ll P_2^n P_3^{n-1}.$$

Par ailleurs, si  $B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$  pour tout  $j$ , alors  $\mathbf{z} \in V_{3,\mathbf{x}}^*$ , et donc si  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$  :

$$T_{3,\mathbf{x}} \ll P_2^{n+1} P_3^\lambda \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

De même on montre

$$T_{4,\mathbf{x}} \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

Par conséquent, si  $P_2 \leq P_3$ , on a

$$N_{U,\mathbf{x}}(P_2, P_3) = N_{\mathbf{x}}(P_2, P_3) + O(P_2^{n-1} P_3^n) = \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} P_2^n P_3^n + O(|\mathbf{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$



uniformément pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $|\mathbf{x}| \leq P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{2}}$ . Par les mêmes calculs, on obtient exactement le même résultat dans le cas  $P_3 \leq P_2$ . Par conséquent, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{l_2 \leq P_2, l_3 \leq P_3} h(l_1, l_2, l_3) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}|=l_1} N_{U,\mathbf{x}}(P_2, P_3) \\ &= c_1(l_1) P_2^n P_3^n + O\left(l_1^{n+4} P_2^n P_3^n \min\{P_2, P_3\}^{-\delta}\right), \end{aligned}$$

uniformément pour tout  $l_1 \leq P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{4}}$ , avec

$$c_1(l_1) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}|=l_1} \mathfrak{S}_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}}.$$

Donc  $h$  vérifie le premier point de la condition 2 avec  $D = n + 4$ , et  $\alpha = \frac{1}{4}$ . Par symétrie, on montre de même que  $h$  vérifie les deux autres points de la condition 2.

On fixe  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \times \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})$  tels que  $\max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0$ . Si l'on note

$$N_{U,\mathbf{x},\mathbf{y}}(P_3) = \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3 \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\},$$

on remarque que

$$N_{U,\mathbf{x},\mathbf{y}}(P_3) = N_{\Lambda_{\mathbf{x},\mathbf{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) + O(T_{1,\mathbf{x},\mathbf{y}}) + O(T_{2,\mathbf{x},\mathbf{y}}) + O(T_{3,\mathbf{x},\mathbf{y}}),$$

avec

$$\begin{aligned} T_{1,\mathbf{x},\mathbf{y}} &= \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3 \mathcal{B}_3\}, \\ T_{2,\mathbf{x},\mathbf{y}} &= \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3, B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \forall j\}, \\ T_{3,\mathbf{x},\mathbf{y}} &= \text{card}\{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3 \mathcal{B}_3, B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \forall i\}. \end{aligned}$$

On a alors immédiatement

$$\begin{aligned} T_{1,\mathbf{x},\mathbf{y}} &\ll P_3^{n+1-\lambda} \ll P_3^{n-1}, \\ T_{2,\mathbf{x},\mathbf{y}} &\ll P_3^\lambda \ll P_3^{n-1}, \\ T_{3,\mathbf{x},\mathbf{y}} &\ll P_3^\lambda \ll P_3^{n-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} N_{U,\mathbf{x},\mathbf{y}}(P_3) &= N_{\Lambda_{\mathbf{x},\mathbf{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) + O(P_3^{n-1}) \\ &= \frac{\text{pgcd}_k(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{Vol}(C_{\mathbf{x},\mathbf{y}})}{\|(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_k\|_2} P_3^n + O(P_3^{n-1}). \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{l_3 \leq P_3} h(l_1, l_2, l_3) &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}), |\mathbf{x}|=l_1 \\ \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}), |\mathbf{y}|=l_2 \\ \max_k |B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \neq 0}} N_{U, \mathbf{x}, \mathbf{y}}(P_3) \\ &= \tilde{c}_3(l_1, l_2) P_3^n + O(l_1^n l_2^n P_3^{n-1}), \end{aligned}$$

et donc  $h$  vérifie le troisième point de la condition 3 pour un  $\alpha$  quelconque et pour  $D = 2n$ , et par symétrie, cette condition est entièrement vérifiée.

On a donc montré que  $h$  est une  $(n, \sigma, 2n, \frac{1}{4}, \delta)$ -fonction, et donc en appliquant la proposition 6.1, on trouve :

**Proposition 6.2.** *Si  $n \geq 28$ , alors pour tout  $B \geq 1$ , on a la formule asymptotique :*

$$N_U(B) = \frac{1}{2} n^2 \sigma B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)).$$

## 7 Conclusion et interprétation des constantes

Nous pouvons finalement calculer le cardinal

$$\begin{aligned} \tilde{N}_U(B) &= \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \cap (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \mid \\ & (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n), (z_0, \dots, z_n) \text{ primitifs, } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq B\}. \end{aligned}$$

On remarque en effet que si  $N_{d,e,f}(B)$  désigne

$$\begin{aligned} \text{card}\{& (d\mathbf{x}, e\mathbf{y}, f\mathbf{z}) \in U \cap (d\mathbf{Z}^{n+1} \times e\mathbf{Z}^{n+1} \times f\mathbf{Z}^{n+1}) \mid \\ & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H'(d\mathbf{x}, e\mathbf{y}, f\mathbf{z}) \leq B\} = N_U(B/def) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{k,l,m}(B) &= \text{card}\{(k\mathbf{x}, l\mathbf{y}, m\mathbf{z}) \in U \cap (k\mathbf{Z}^{n+1} \times l\mathbf{Z}^{n+1} \times m\mathbf{Z}^{n+1}) \mid \\ & (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n), (z_0, \dots, z_n) \text{ primitifs, } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, H'(k\mathbf{x}, l\mathbf{y}, m\mathbf{z}) \leq B\} \\ &= \tilde{N}_U(B/klm) \end{aligned}$$

(pour  $d, e, f, k, l, m \in \mathbf{N}$ ), alors on a

$$N_{d,e,f}(B) = \sum_{d|k} \sum_{e|l} \sum_{f|m} \tilde{N}_{k,l,m}(B).$$

Par inversions de Möbius successives appliquées à  $(d, e, f) = (1, 1, 1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{N}_U(B) &= \tilde{N}_{(1,1,1)}(B) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mu(k) \sum_{l \in \mathbf{N}^*} \mu(l) \sum_{m \in \mathbf{N}^*} \mu(m) N_{k,l,m}(B) \\ &= \sum_{k,l,m \in \mathbf{N}^*} \mu(k) \mu(l) \mu(m) N_U(B/klm) \\ &= \frac{1}{2} \sigma \sum_{k,l,m \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(k) \mu(l) \mu(m)}{k^n l^n m^n} n^2 B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)).\end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{k,l,m \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(k) \mu(l) \mu(m)}{k^n l^n m^n} = \left( \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)}{k^n} \right)^3,$$

et que

$$\sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)}{k^n} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{1}{p^n} \right)$$

( $\mathcal{P}$  désignant l'ensemble des entiers premiers). En rappelant que l'on a  $\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{8} \tilde{N}_U(B^{\frac{1}{n}})$ , on a donc finalement démontré le résultat suivant :

**Proposition 7.1.** *Pour tout  $n \geq 28$ , on a :*

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{16} \sigma' B \log(B)^2 + O(B \log(B)),$$

lorsque  $B \rightarrow \infty$ , où l'on a noté  $\sigma' = \sigma \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{1}{p^n} \right)^3$ .

Nous allons à présent donner une interprétation des constantes introduites, et constater finalement que l'expression obtenue est bien en accord avec les formules conjecturées par Peyre dans [Pe].

Dans tout ce qui va suivre, on notera  $\pi$  la projection

$$\begin{aligned}\pi : \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)} \setminus \left( (\{\mathbf{0}\} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1}) \cup (\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1}) \right. \\ \left. \cup (\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \{\mathbf{0}\}) \right) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n\end{aligned}$$

On note  $W = \pi^{-1}(V)$ . Si  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W$  est un point lisse avec, par exemple,  $B_{k_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$  pour un certain  $k_1 \in \{0, \dots, n\}$ , alors la forme de Leray  $\omega_L$  sur  $W$  est donnée par

$$\begin{aligned}\omega_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \frac{(-1)^{n+1-k_1}}{B_{k_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_0 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &\quad \wedge dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_{k_1}} \wedge \dots \wedge dz_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Pour toute place  $\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})$  la forme de Leray induit une mesure locale  $\omega_{L,\nu}$ .

## 7.1 Étude de l'intégrale $J$

Rappelons que l'on a

$$J = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\beta.$$

et cette intégrale est absolument convergente (cf. lemme 2.11). On pose par ailleurs :

$$\sigma_{\infty}(V) = \int_{W \cap [-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty}.$$

Nous allons montrer que l'intégrale  $J$  coïcide avec  $\sigma_{\infty}(W)$ . Il nous suffit de le vérifier localement i.e. montrons que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$  sur lequel, par exemple,  $B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ ,

$$\sigma_{\infty}(U) = \int_{U \cap [-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty} = \int_{U \cap [-1,1]^{3n+3}} \frac{1}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}},$$

(avec  $d\hat{\mathbf{z}} = dz_0 \dots dz_{n-1}$ ) coïncide avec

$$J_U = \int_{\mathbf{R}} \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\beta.$$

Considérons donc un tel ouvert  $U$ . De la même manière que pour le lemme 2.11, on montre que  $J_U = \lim_{\mu \rightarrow \infty} J_U(\mu)$ , où

$$J_U(\mu) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\beta$$

pour tout  $\mu > 0$ . On peut réécrire l'intégrale  $J_U(\mu)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} J_U(\mu) &= \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} \left( \int_{-\mu}^{\mu} e(\beta F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) d\beta \right) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \\ &= \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} \frac{\sin(2\pi\mu F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))}{\pi F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \end{aligned}$$

On remplace ensuite la variable  $z_n$  par  $t = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , et on note

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_n = \frac{t}{B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})} z_k \in [-1, 1] \text{ et } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors (si  $A = \sum_{i,j} |\alpha_{i,j,n}|$ ) :

$$J_U = \int_{-A}^A \frac{\sin(2\pi\mu t)}{\pi t} \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(t)}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}} dt$$

Si l'on note

$$\phi(t) = \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(t)}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}},$$

on remarque que cette fonction est à variations bornées. Par conséquent par application des résultats d'analyse de Fourier (voir [W-W, 9.43]) on a que

$$\begin{aligned} J_U = \phi(0) &= \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(0)}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}} \\ &= \int_{U \cap [-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty} = \sigma_\infty(U). \end{aligned}$$

Remarquons que ces calculs constituent un équivalent du travail effectué par Igusa dans [Ig, §IV.6] pour le cas les intégrales de fonctions indicatrices.

Nous allons à présent interpréter cette constante  $\sigma_\infty$  en termes de mesures de Tamagawa. Rappelons que (avec les notations de [Sch2]) la mesure  $\tau_\infty = \omega_\infty$  est définie localement sur l'ouvert

$$U_{0,0,0} = \{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \mid x_0 y_0 z_0 \neq 0, B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0\}$$

par

$$\omega_\infty = \frac{du_1 \dots du_n dv_1 \dots dv_n dw_1 \dots dw_{n-1}}{h_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) |B_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}$$

où  $\mathbf{u} = (1, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (1, v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (1, w_1, \dots, w_n)$  et

$$h_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = h_\infty^1(\mathbf{x}) h_\infty^2(\mathbf{y}) h_\infty^3(\mathbf{z}),$$

avec

$$h_\infty^1(\mathbf{x}) = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|^n, \quad h_\infty^2(\mathbf{y}) = \max_{0 \leq j \leq n} |y_j|^n, \quad h_\infty^3(\mathbf{z}) = \max_{0 \leq k \leq n} |z_k|^n.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

**Lemme 7.2.** *On a*

$$\tau_\infty = \frac{n^3}{8} \sigma_\infty.$$

*Démonstration.* On démontre le résultat localement i.e. montrons que pour tout ouvert  $U$  par exemple inclus dans  $U_{0,0,0}$  défini plus haut (les autres cas se traitant de manière analogue) on a  $\tau_\infty(U) = \frac{n^3}{8} \sigma_\infty(\pi^{-1}(U))$ . Par définition de la mesure de Leray, pour un tel ouvert  $U$ , on a

$$\sigma_\infty(\pi^{-1}(U)) = \int_{\substack{\pi^{-1}(U) \cap \{\max_i |x_i| \leq 1 \\ \max_j |y_j| \leq 1, \max_k |z_k| \leq 1\}}} \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\hat{\mathbf{z}}}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}$$

avec  $d\hat{\mathbf{z}} = dz_0 \dots dz_{n-1}$ . On remarque que

$$\max_i |x_i| = 1 \Leftrightarrow |x_0| \leq \left( \max_{i \neq 0} \frac{|x_i|}{|x_0|} \right)^{-1}.$$

On applique alors les changements de variables  $x_i = x_0 u_i$ ,  $y_j = y_0 v_j$  et  $z_k = z_0 w_k$  dans l'intégrale ci-dessus. On a alors que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in [-1, 1]^{3n+3} &\Leftrightarrow |x_0| \leq (\max_i |u_i|)^{-1}, \quad |y_0| \leq (\max_j |v_j|)^{-1}, \\ &|z_0| \leq (\max_k |w_k|)^{-1}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} &\sigma_\infty(\pi^{-1}(U)) \\ &= \int_U \frac{1}{|B_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})|} \left( \int_{\substack{|x_0|^n \leq h_\infty^1(\mathbf{x}) \\ |y_0|^n \leq h_\infty^2(\mathbf{y}) \\ |z_0|^n \leq h_\infty^3(\mathbf{z})}} |x_0|^{n-1} |y_0|^{n-1} |z_0|^{n-1} dx_0 dy_0 dz_0 \right) d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\hat{\mathbf{w}} \\ &= \frac{8}{n^3} \int_U \frac{d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\hat{\mathbf{w}}}{h_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) |B_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})|} = \frac{8}{n^3} \int_U \omega_\infty \end{aligned}$$

□

## 7.2 Étude de la série $\mathfrak{S}$

Rappelons que l'on a

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} A(q)$$

en notant

$$A(q) = q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q) = 1}} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right)$$

et nous avons vu d'autre part (cf. lemme 2.3) que cette série converge absolument.

**Lemme 7.3.** *Si  $\text{pgcd}(q_1, q_2) = 1$ , alors on a*

$$A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2),$$

*autrement dit, la fonction  $A$  est multiplicative.*

*Démonstration.* On remarque dans un premier temps que

(75)

$$A(q) = q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ \text{pgcd}(a, q) = 1}} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \prod_{k=0}^n \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}} e\left(\frac{a}{q} B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') b\right) \right).$$

Or on a

$$\sum_{b \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}} e\left(\frac{a}{q} B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') b\right) = \begin{cases} q & \text{si } B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \equiv 0 \pmod{q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A(q) &= q^{-2n-2} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*} \text{card}\{\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \equiv 0, \forall k\} \\ &= \varphi(q) q^{-2n-2} \text{card}\{\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \equiv 0 \pmod{q}, \forall k\}. \end{aligned}$$

Or si l'on a  $q = q_1 q_2$ , par le théorème chinois :

$$\begin{aligned} &\text{card}\{\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \equiv 0 \pmod{q}, \forall k\} \\ &= \text{card}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1) \equiv 0 \pmod{q_1}, \forall k\} \\ &\quad \cdot \text{card}\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_2) \equiv 0 \pmod{q_2}, \forall k\}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $A$  est bien multiplicative.  $\square$

Puisque  $A$  est multiplicative et absolument convergente, on a la formule :

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sigma_p$$

où

$$\sigma_p = \sum_{k=0}^{\infty} A(p^k).$$

Par la suite on note pour tout  $q \in \mathbf{N}^*$ ,

$$(76) \quad M(q) = \text{card}\{(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'') \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{3n+3} \mid F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'') \equiv 0 \pmod{q}\}$$

On peut alors interpréter  $\sigma_p$  à l'aide du résultat suivant :

**Lemme 7.4.** *On a que pour tout  $N > 0$  :*

$$\sum_{k=0}^N A(p^k) = \frac{M(p^N)}{p^{N(3n+2)}},$$

et par conséquent :

$$\sigma_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(p^k)}{p^{k(3n+2)}}.$$

*Démonstration.* On remarque dans un premier temps que

$$\begin{aligned} M(q) &= q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{t}{q} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right) \\ &= q^{-1} \sum_{q_1|q} \sum_{\substack{0 \leq a < q_1 \\ \text{pgcd}(a, q_1)=1}} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q_1} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right). \end{aligned}$$

On a donc, si  $q = p^N$  :

$$\begin{aligned} M(p^N) &= p^{-N} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{0 \leq a < p^k \\ \text{pgcd}(a, p^k)=1}} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right) \\ &= p^{-N} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{0 \leq a < p^k \\ \text{pgcd}(a, p^k)=1}} \left(\frac{p^N}{p^k}\right)^{3n+3} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right) \\ &= p^{(3n+2)N} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{0 \leq a < p^k \\ \text{pgcd}(a, p^k)=1}} p^{-(3n+3)k} \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')\right) \\ &= p^{(3n+2)N} \sum_{k=0}^N A(p^k), \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

Nous allons à présent étudier le lien entre les constantes  $\sigma_p$  et la mesure de Tamagawa  $\tau_p$  définie (avec les notations de [Sch2]) par :

$$\tau_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \omega_p$$

où  $\omega_p$  est la mesure définie localement sur  $V(\mathbf{Q}_p) \cap U_{0,0,0}$  par

$$\omega_p = \frac{du_{1,p} \dots du_{n,p} dv_{1,p} \dots dv_{n,p} dw_{1,p} \dots dw_{n-1,p}}{h_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) |B_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_p}$$

où  $\mathbf{u} = (1, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (1, v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (1, w_1, \dots, w_n)$  et

$$h_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = h_p^1(\mathbf{x}) h_p^2(\mathbf{y}) h_p^3(\mathbf{z}),$$

avec

$$h_p^1(\mathbf{x}) = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|_p^n, \quad h_p^2(\mathbf{y}) = \max_{0 \leq j \leq n} |y_j|_p^n, \quad h_p^3(\mathbf{z}) = \max_{0 \leq k \leq n} |z_k|_p^n.$$



**Lemme 7.5.** Soit  $p \in \mathcal{P}$ , on pose :

$$a(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-3}.$$

On a alors

$$\int_{\substack{W(\mathbf{Q}_p) \cap \{h_p^1(\mathbf{x}) \leq 1 \\ h_p^2(\mathbf{y}) \leq 1, h_p^3(\mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(p) \omega_p(V(\mathbf{Q}_p)).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{3n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^{n-1}$  de la forme  $U_1 \times U_2 \times U_3$ , tel que pour tout  $([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\mathbf{z}]) \in U$  on a (par exemple)  $x_0 y_0 z_0 \neq 0$  et  $B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$  (les autres cas se traitant de façon analogue) l'égalité

$$\int_{\substack{\pi^{-1}(U) \cap \{h_p^1(\mathbf{x}) \leq 1 \\ h_p^2(\mathbf{y}) \leq 1, h_p^3(\mathbf{z}) \leq 1\}}} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(p) \omega_p(U)$$

est vérifiée. Remarquons dans un premier temps que, pour un tel ouvert  $U$ , on a

$$a(p) \omega_p(U) = \int_{U_1 \times U_2 \times U_3} \frac{du_{1,p} \dots du_{n,p} dv_{1,p} \dots dv_{n,p} dw_{1,p} \dots dw_{n-1,p}}{|B_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_p h_p^1(\mathbf{u}) h_p^2(\mathbf{v}) h_p^3(\mathbf{w})}.$$

En appliquant trois fois le lemme 5.4.5 de [Pe], on obtient alors :

$$a(p) \omega_p(U) = \int_{\pi^{-1}(U)} \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z}}{|B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_p} = \int_{\pi^{-1}(U)} \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

□

Nous allons à présent établir le lemme suivant dont la démonstration est inspirée de [P-T, Lemme 3.2] et de [Sch2, Lemme 3.4] :

**Lemme 7.6.** Soit

$$W^*(r) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^r)^{3n+3}, \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0}(p), \mathbf{y} \not\equiv \mathbf{0}(p), \\ \mathbf{z} \not\equiv \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0(p^r)\},$$

et on pose  $N^*(r) = \text{card}(W^*(r))$ . Il existe alors un entier  $r_0$  tel que pour tout  $r \geq r_0$  :

$$\int_{\substack{\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \mathbf{x} \not\equiv \mathbf{0}(p) \\ \mathbf{y} \not\equiv \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \not\equiv \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\}}} \omega_{L,p} = \frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}}.$$

*Démonstration.* Soit  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$ . Dans tout ce qui suit, on note  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^r}$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned}
 (77) \quad \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p) \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} &= \sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^r} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \\ \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p)}} \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})=0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
 (78) \quad &= \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W^*(r)} \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})=0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).
 \end{aligned}$$

Puisque  $V$  est lisse, il existe un  $r > 0$  assez grand tel que, pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$  tel que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p)$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p)$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p)$  et  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$  :

$$c = \inf_{i,j,k} \{ \nu_p(B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \nu_p(B'_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})), \nu_p(B''_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \}$$

soit non nul et constant sur la classe définie par  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . On peut supposer que  $r > c$  et que  $c = \nu_p(B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ . On considère  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$  tel que  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , et  $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$  quelconque. On a alors

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') &= F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{k=0}^n B_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) w'_k + \sum_{j=0}^n B'_j(\mathbf{u}, \mathbf{w}) v'_j \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n B''_i(\mathbf{v}, \mathbf{w}) u'_i + G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'),
 \end{aligned}$$

où  $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}')$  est une somme de termes contenant au moins deux facteurs  $u'_i$ ,  $v'_j$  ou  $w'_k$ . Ainsi, on a donc, si  $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') \in (p^r \mathbf{Z}_p)^{3n+3}$  :

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(p^{r+c}).$$

Par conséquent, l'image de  $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  dans  $\mathbf{Z}_p/p^{r+c}$  dépend uniquement de  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^r}$ , on note alors  $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  cette image.

Si  $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$ , alors l'intégrale

$$\int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})=0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

est nulle, et l'ensemble

$$\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{r+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0(p^{r+c})\}$$

est vide.

Si  $F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$  alors, par le lemme de Hensel, les applications coordonnées  $X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n, Z_0, \dots, Z_{n-1}$  définissent un isomorphisme de

$$\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}$$

sur

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) + (p^r \mathbf{Z}_p)^{3n+2},$$

où  $\hat{\mathbf{z}} = (z_0, \dots, z_{n-1})$ . Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0}} \omega_{L,p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \int_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}) + (p^r \mathbf{Z}_p)^{3n+2}} p^c du_{0,p} \dots du_{n,p} dv_{0,p} \dots dv_{n,p} dw_{0,p} \dots dw_{n-1,p} = p^{c-r(3n+2)}. \end{aligned}$$

On a d'autre part, puisque  $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{r+c}}$  ne dépend que de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$\begin{aligned} & p^{-(r+c)(3n+2)} \text{card}\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{r+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ & F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0(p^{r+c})\} = p^{-(r+c)(3n+2)} p^{(3n+3)c} = p^{c-r(3n+2)}. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p) \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W^*(r) \\ F^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0}} p^{c-r(3n+2)} \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in W^*(r)} p^{-(r+c)(3n+2)} \text{card}\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \pmod{p^{r+c}} \mid [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]_r = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ & F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv 0(p^{r+c})\} = \frac{N^*(r+c)}{p^{(r+c)(3n+2)}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Nous établissons à présent un lemme issu de [P-T, Lemme 3.3] et [Sch2, Lemme 3.5].

**Lemme 7.7.** *On a que*

$$\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p) \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0}} \omega_{L,p} = \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0}} \omega_{L,p},$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}} = \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 \sigma_p.$$

*Démonstration.* Pour démontrer la première égalité, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\omega_{L,p}(p\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \omega_{L,p}(\mathbf{x}, p\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p\mathbf{z}) = p^{-n}\omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \omega_{L,p}(p\mathbf{x}, p\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \omega_{L,p}(p\mathbf{x}, \mathbf{y}, p\mathbf{z}) = \omega_{L,p}(\mathbf{x}, p\mathbf{y}, p\mathbf{z}) = p^{-2n}\omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \omega_{L,p}(p\mathbf{x}, p\mathbf{y}, p\mathbf{z}) &= p^{-3n}\omega_{L,p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p) \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} &= \left(1 - \frac{3}{p^n} + \frac{3}{p^{2n}} - \frac{1}{p^{3n}}\right) \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p}.\end{aligned}$$

Nous avons vu par ailleurs que (cf. lemme 7.4) :

$$\sigma_p = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{p^{r(3n+2)}},$$

où  $N(r) = \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bmod p^r \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0(p^r)\}$ . On considère ensuite pour  $r > 0$  fixé et pour des entiers  $i, j, k$  tels que  $r \geq i + j + k$  :

$$\begin{aligned}\tilde{N}(i, j, k) &= \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{x} \in (p^i \mathbf{Z}_p / p^r)^{n+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p^{i+1}), \\ &\quad \mathbf{y} \in (p^j \mathbf{Z}_p / p^r)^{n+1}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p^{j+1}), \mathbf{z} \in (p^k \mathbf{Z}_p / p^r)^{n+1}, \\ &\quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p^{k+1}), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0(p^r)\}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\tilde{N}(i, j, k) &= \text{card}\{(\mathbf{x} \bmod p^{r-i}, \mathbf{y} \bmod p^{r-j}, \mathbf{z} \bmod p^{r-k}) \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}(p), \\ &\quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0}(p), \mathbf{z} \neq \mathbf{0}(p), F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}(p^{r-i-j-k})\},\end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}\tilde{N}(i, j, k) &= p^{(n+1)(i+j)} p^{(n+1)(j+k)} p^{(n+1)(i+k)} N^*(r-i-j-k) \\ &= p^{2(n+1)(i+j+k)} N^*(r-i-j-k).\end{aligned}$$

Soit  $r_0$  un entier comme dans le lemme précédent, et soit

$$I(r) = \{(i, j, k) \mid r - r_0 < i + j + k \leq r - r_0 + 3\}.$$

On remarque que :

$$N(r) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ r-i+j+k \geq r_0}} \tilde{N}(i,j,k) + O\left(\sum_{(i,j,k) \in I(r)} \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^r} \mid \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}(p^i), \mathbf{y} \equiv \mathbf{0}(p^j), \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}(p^k)\}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j,k) \in I(r)} \text{card}\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \pmod{p^r} \mid \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}(p^i), \mathbf{y} \equiv \mathbf{0}(p^j), \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}(p^k)\} \\ \ll_{r_0} r^2 \max_{(i,j,k) \in I(r)} p^{(n+1)(r-i)+(n+1)(r-j)+(n+1)(r-k)} \\ \ll_{r_0} r^2 p^{(3n+2)r} \max_{(i,j,k) \in I(r)} p^{r-2(i+j+k)} \\ \ll_{p,r_0} r^2 p^{(3n+2)r} p^{-r}. \end{aligned}$$

On a donc

$$N(r) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ r-i+j+k \geq r_0}} p^{2(n+1)(i+j+k)} + O(r^2 p^{(3n+1)r}).$$

Puisque la somme est restreinte aux  $(i, j, k)$  tels que  $r_0 \leq r - i - j - k$ , on a alors par le lemme précédent :

$$\frac{N^*(r - i - j - k)}{p^{(r-i-j-k)(3n+2)}} = \frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}}.$$

On a donc

$$N^*(r - i - j - k) = N^*(r) p^{-(3n+2)(i+j+k)},$$

et donc

$$N(r) = \left( \sum_{r_0 \leq r-i-j-k} p^{-(i+j+k)n} \right) N^*(r) + O(r^2 p^{(3n+1)r}).$$

On obtient donc finalement

$$\sigma_p = \lim_{r \rightarrow \infty} p^{-(3n+2)r} N(r) = \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-3} \lim_{r \rightarrow \infty} p^{-(3n+2)r} N^*(r).$$

□

D'après ce lemme, on a donc :

$$\sigma_p = \int_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=0}} \omega_{L,p}.$$

En utilisant le lemme 7.5 on a ainsi :

$$(79) \quad \tau_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 \sigma_p.$$

### 7.3 Conclusion

Rappelons que la formule asymptotique conjecturée par Peyre dans [Pe] pour le nombre  $\mathcal{N}_U(B)$  de points de hauteur bornée par  $B$  sur l'ouvert  $U$  de Zariski de la variété  $V$  (pour la hauteur associée au fibré anticanonique  $\omega_V^{-1}$ ) est :

$$(80) \quad \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)B \log(B)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))-1}$$

où

$$\alpha(V) = \frac{1}{(\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1)!} \int_{\Lambda_{\text{eff}}^1(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y \rangle} dy,$$

$$\Lambda_{\text{eff}}^1(V)^\vee = \{y \in \text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in \Lambda_{\text{eff}}^1(V), \langle x, y \rangle \geq 0\}$$

et

$$\beta(V) = \text{card}(H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(\overline{V}))),$$

$$\tau_H(V) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \tau_\nu(V(\mathbf{Q}_\nu)).$$

Or, dans le cas présent on a

$$\text{Pic}(V) = \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(1, 0, 0) \oplus \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(0, 1, 0) \oplus \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(0, 0, 1) \simeq \mathbf{Z}^3, \quad \text{rg}(\text{Pic}(V)) = 3,$$

$$\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(n, n, n),$$

$$\Lambda_{\text{eff}}^1(V) = \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(1, 0, 0) \oplus \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(0, 1, 0) \oplus \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_V(0, 0, 1) \simeq (\mathbf{R}^+)^3.$$

On a par conséquent :

$$\alpha(V) = \frac{1}{2} \int_{[0, +\infty[^3} e^{-nt_1 - nt_2 - nt_3} dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{1}{2n^3}.$$

D'autre part  $\text{Pic}(\overline{V}) \simeq \mathbf{Z}^3$ , et le groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  agit trivialement sur  $\text{Pic}(\overline{V})$ , on a donc

$$\beta(V) = 1.$$

Par ailleurs, d'après ce qui a été vu dans les sections précédentes, on a

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \tau_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \mathfrak{S} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3$$

et

$$\tau_\infty(V(\mathbf{R})) = \frac{n^3}{8} J.$$

Ainsi on a ici

$$\begin{aligned} \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)B \log(B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))-1} &= \frac{1}{16} \mathfrak{S}^J \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 B \log(B)^2 \\ &= \frac{1}{16} \sigma' B \log(B)^2, \end{aligned}$$

et on retrouve bien la formule de la proposition 7.1.

## Références

- [B-B] V. Blomer, J. Brüdern, *Counting in hyperbolic sikes : the diophantine analysis of multihomogeneous diagonal equations*, arXiv : 1402.1122v1.
- [B-T] V. V. Batyrev, Yu. Tschinkel, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Astérisque. **251** (1998) 299-340.
- [Bi] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser A **265** (1961) 245-263.
- [Br] T.D. Browning *Quantitative Arithmetic of Projective Varieties*, Progress in Mathematics. **277**. Birkhäuser (2009).
- [Da] H. Davenport, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, 2<sup>eme</sup> édition, Cambridge University Press, (2005).
- [G-D] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *éléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, troisième partie, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **28**. (1964-67). 5-255.
- [Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. **52**, Springer-Verlag, New York (1977).
- [HB] D. R. Heath-Brown, *The density of rational points on curves and surfaces*, Ann. Math. **155** (2002) 553-598.
- [Ig] J. I. Igusa, *Lectures on forms of higher degree*, Tata institute of fundamental research, Bombay and Springer-Verlag, Berlin (1978).

- [M-V] D. Masser, J.D. Vaaler *Counting algebraic numbers with large height II*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 427-445.
- [Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79**. (1995) 101-218.
- [P-T] E. Peyre, Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. of Comp. **70** (2000) 367-387.
- [Sch1] D. Schindler, *Bihomogeneous forms in many variables*, arXiv. 1301.6516.
- [Sch2] D. Schindler, *Manin's conjecture for certain biprojective hypersurfaces*, arXiv. 1307.7069.
- [W-W] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1927).
- [Wi] M. L. Widmer, *Counting primitive points of bounded height*, arXiv. 1204.0927.